第一编 绪 论

第一章 概 述

第一节 算术、算学、数学等名称的起源

数学，我国古代叫做算术，后来叫做算学，又叫数学．近几十年来才确定统一叫做数学．

古代“算”字有三种写法：筭、算、祘．从字形的结构，可以看到事物演变的一些痕迹．许慎《说文解字》[1]对这几个字作如下的解释：

“筭，长六寸，计历数者．从竹从弄，言常弄乃不误也．”

“算，数也．从竹从具，读若筭．”

“筭”或“算”原来都是指一种竹制的工具，是几寸长的竹签，也叫做筹码．用来记数、计算或卜卦．摆弄这些“算”，有一套技术或学问，自然就叫做“算术”或“算学”．我国盛产竹子，是世界上最善于利用竹子的国家．用竹子做计算工具，使我国古代数学带有许多和西方不同的特色．

“祘”由两个“示”字合成．《说文》解释示字说：“示，神事也．”“二”是古文的上字，三竖（后来写成一竖两点）是日、月、星．古人以为天上有神灵，神的表示是从上面下来

〔1〕我国第一本分部首的字典，完成于公元121年，简称《说文》．

的[1]．筹同时也用来占筮，因此"祘"字带有迷信色采，是不奇怪的。

甲骨文的 字[2]，是"数"字的出处[3]．它是结绳记数的象形．左边是一根杆上打了许多结，上下是散乱的绳头，右边后来变成篆文 ，"从又、卜声"（《说文》），就是右手．所以整个字反映了用手结绳记数的形象。

"算"字是什么时候开始使用的？李约瑟(Joseph Needham)[4]认为在甲骨文或金文中从未发现过这个算字，因此它出现的年代不可能早于公元前 3 世纪[5]．无论如何，"算术"这个名称在汉代已经通行[6]．正式的使用，是《九章算术》一书．它的涵义是指当时的数学全体，和现代算术的意义不同。

宋、元两代，我国数学发展达到高峰．那时"算学"和"数学"这两个词是并用的．例如在朱世杰《四元玉鉴》(1303)

---

〔1〕凡属鬼神的字，多用示（礻）字旁，如祜、祷、禅、祠等.

〔2〕《殷虚文字甲编》（1948）六一六．见考古研究所《甲骨文编》（1965）p.720附录3671号.

〔3〕根据李迪的意见.

〔4〕当代英国科学史家，以研究中国科学史著称于世.

〔5〕李约瑟《中国科学技术史》(Science and Civilisation in China) 译本，第三卷（1978）p.8.

〔6〕李俨《中国古代数学史料》（1963）p.22.

的序中，就同时使用这两个词．“松庭先生以数学名家，周游湖海二十余年矣，……方今尊崇算学，科目渐兴，……”．

秦九韶《数书九章》（1247），也叫做《数学大略》，在序中说：“尝从隐君子受数学．”而朱世杰的另一部著作叫做《算学启蒙》（1299）．

算学、数学并用的情况，一直延续了几百年．1935年“中国数学会名词审查委员会”仍主张两词并存．直到1939年6月，为了划一起见，才确定用“数学”，而不用“算学”[1]．

“数学”的拉丁文是mathematica，希腊文是μαθηματική，来源于 μαθημα，是科学或知识的意思[2]．随着时代的进展，它的涵义才逐渐明确起来．

数学最显著的特点之一，是体系的严谨性．它要求每一个概念（除了少数的基本概念之外）都要给出明确的定义．但“数学”这个概念本身，却很难一劳永逸地给出一个完美无缺的定义．主要原因是这门科学还在不断地发展着．

在历史上，数学有过种种定义．

“数学是量的科学”这个古老的定义，可以追溯到古希腊哲学家亚里士多德（Aristotle，Ἀριστοτέλης，公元前384—322年）[3]．此外还有各式各样的说法．摩利兹（Robert Edouard Moritz）《数学家语录》[4] 列举了数以百计的数学定义和对数

〔1〕国立编译馆编《数学名词》（1947）p.5，“数学（Mathematics）一名词确定之经过”．

〔2〕Webster's International Dictionary of the English Language (1902).

〔3〕Florian Cajori, A History of Mathematics (1919) p.285.

〔4〕Memorabilia Mathematica, or The Philomath's Quotation-Book (1914).

学性质的描述。

最惹人注目并常被引用或受到抨击的是"罗素定义"。罗素(Bertrand Russell, 1872—1970)是现代英国数理哲学家，他写到：

"纯粹数学完全包含这样的论断，如果某命题对于某些事物是真的，那么另外的某命题对于那些事物就是真的。它根本不讨论第一个命题是否确实是真的，也不管所假定的那些事物是否是真的。……如果我们的假设是关于一般事物而不是某些特殊事物的话，我们的推论就构成了数学。这样的数学可以定义为一种科目，我们决不知道其中说的是什么，也不知道所说的是真还是假。"[1]

如果不看前面的论述，单看罗素的定义，会以为这是几句呓语。它甚至可以译成"数学是一种莫名其妙的科目"。

本世纪二、三十年代，在数学基础的研究中形成了三个唯心主义的学派[2]：直觉主义、形式主义和逻辑主义[3]。罗素是逻辑主义学派的代表人物。这一派把数学看作一种逻辑结构，将它和其他的科学技术割裂开来，没有看到数学是在人类的社会实践中发展起来的事实。罗素定义是逻辑主义思想的反映，它强调近代数学高度抽象的特点，片面夸大逻辑的作用，否认数学

〔1〕罗素定义的原文是："Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true"见 B.Russell, Recent Work on the Principles of Mathematics, International Monthly, vol. 4 (1901) p.84.

〔2〕参考Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) pp.1192—1208.

〔3〕逻辑主义认为全部数学可以归结为逻辑，因而是逻辑的一个分支。而逻辑是不反映任何实在联系的任意结合的符号体系，与客观世界无关。

最终需要接受实践的检验。

恩格斯在《自然辩证法》中指出："数学是数量的科学，它从数量这个概念出发。"(Die Mathematik ist die Wissenschaft der Größen; sie geht vom Begriff der Größe aus.)[1] 又在《反杜林论》里指出："纯数学的对象是现实世界的空间形式和量的关系，所以是非常现实的材料。"(Die reine Mathematik hat zum Gegenstand die Raumformen und Quantitätsverhältnisse der wirklichen Welt, also einen sehr realen Stoff.)[2]

根据恩格斯的精神，较确切的说法是："数学是研究现实世界的量的关系与空间形式的科学。"这里"量"应作广义的理解，随着数学的发展，将不断取得新的内容。

第二节 数学史的分期

从古到今整个数学的发展大体可以分为五个时期[3]。

(一) 数学萌芽时期

(公元前600年以前)

公元前十几个世纪，人类历史从铜器时代过渡到铁器时

〔1〕译本(1971)p.235，原文见(1959)柏林版 p.274.

〔2〕译本(1972)p.35，原文见(1959)柏林版 p.44. Quantitätsverhältnisse 流行的译法是"数量关系"，译为"量的关系"较贴切。参考关肇直《论数学的对象》，载《自然辩证法研究通讯》(1957) 2期.

〔3〕前四个时期参考柯尔莫戈洛夫(А.Н.Колмогоров)《数学》(Математика)，赵孟养译，载《苏联大百科全书》(1954) 2版26卷.
另参考关肇直《数学史的划期，数学的萌芽时期》，载《数学通报》(1960.2) p.8.

代。铁器的使用，大大促进了生产力的发展，使社会财富增加，刺激商业贸易。由于社会经济生活的需要，人们越来越多地要计算产品的数量和劳动时间的长短，测定建筑物的大小和丈量土地的面积等等。人类在长期的生产实践中积累了许多数学知识，逐渐形成了数的概念，并产生了关于数的运算方法。由于田亩度量和天文观测的需要，引起了几何学的初步发展。

但这些知识是片断的、零碎的，没有形成严整的体系。更重要的是缺乏逻辑因素，基本上还看不到命题的证明。数学区别于其他自然科学的最突出的特点之一是演绎推理和公理法，在这一时期还没有显露出来[1]。

（二）初等数学时期

（公元前600年到17世纪中叶）

公元前6、7世纪，地中海一带成为文化昌盛的地区。在生产、商业、航海以及社会政治生活发展的影响下，研究自然界的兴趣增加了，探索客观现实及其发展规律的愿望逐渐代替了旧的宗教神话的世界观。

这时在数学方面已积累起来大量的资料，有待进一步去整理和深刻化。一些希腊学者开始尝试对命题加以证明。所谓证明，就是借助一些真实性业经确定的命题来论证某一命题真实性的思想过程。

---

〔1〕近代数学的三个最显著的特点是：1. 高度的抽象性；2. 体系的严谨性（包括逻辑的严密性和结论的确定性）；3. 应用的广泛性。参考《数学——它的内容、方法和意义》（Математика, её содержание, методы и значение）第一卷，第一章，孙小礼译（1958）。

这种尝试，可以塔利斯为代表。证明命题，是希腊几何学的基本精神，也是数学史上一件大事。从此数学由具体的、实验的阶段过渡到抽象的、理论的阶段。数学经过这样带有根本性的变革逐渐形成一门独立的、演绎的科学。这便是数学第二时期的开始。

在这一时期里，初等几何、算术、初等代数、三角学等都已成为独立的科目。和17世纪中叶以后的解析几何、微积分相比较，这一时期的研究内容可以用“初等数学”来概括，因此叫做初等数学时期。

（三）变量数学时期

（17世纪中叶到19世纪20年代）

恩格斯在《反杜林论》[1]中说：“初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的来说是这样；而变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用。”他又在《自然辩证法》[2]中说：“数学中的转折点是笛卡儿的变数(Der Wendepunkt in der Mathematik war Descartes' variable Größe)。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的，但不是由他们发明的。”

16、17世纪，欧洲封建社会开始解体，代之而起的是资本

〔1〕译本(1970)p.132. 原文见（1959）柏林版p.165.

〔2〕译本(1971)p.236. 原文见(1959)柏林 版 p.275.

主义社会，生产力大大解放．由于资本主义工场手工业的繁荣和向机器生产的过渡，促使技术科学和数学急速向前发展．例如在航海方面，为了确定船只的位置，要求更加精密的天文观测．军事方面，弹道学成为研究的中心课题．准确时计的制造，也吸引着许多优秀的科学家．运河的开凿，堤坝的修筑，行星的椭圆轨道理论等等，也都需要很多复杂的计算[1]．

古希腊以来的初等数学，已渐渐不能满足当时的需要了．在数学研究中自然而然地引入了变量与函数的概念．从此数学进入了第三时期——变量数学时期．这一时期和前一时期的区别，在于前一时期主要是用静止的方法研究客观世界的个别要素；而这一时期是用运动和变化的观点来探究事物变化和发展的过程．

变量数学时期以笛卡儿的解析几何的建立为起点(1637)，接着是微积分的兴起．这一时期还出现了概率论和射影几何等新的数学部门，但似乎都被微积分（或数学分析）过分强大的光辉掩盖了．分析学以汹涌澎湃之势向前发展，在整个18世纪达到了空前灿烂的程度，其内容的丰富，应用的广泛，使人目不暇接．

（四）近代数学时期

（19世纪20年代到二次大战）

变量数学时期新兴起的许多部门，蓬勃地向前发展，内容和方法不断地充实、深入和扩大．18、19世纪之交，已经达到

〔1〕参考原种行、清水英一《数学史新讲》(1940) 第二章．

丰沛茂密、绿叶成荫的境地。然而，伴随着向数学进军的节节胜利，却带来一种消极的情绪。似乎数学的宝藏已经挖掘殆尽，再没有多大发展的余地了。这正是暴风雨前夕的宁静，它预示着巨大革命潮流的到来。

19世纪20年代，数学革命的狂飙终于来临了。数学发生了一连串本质的变化。首先是罗巴契夫斯基非欧几何的出现；其次是阿贝耳和伽罗瓦开创了近世代数的研究；还有波尔察诺和柯西重新奠定分析的严格逻辑基础。随后拓扑学、复变函数论等簇新的领域也出现了。从此数学又迈入一个新的时期——近代数学时期。

欧几里得几何唯一地存在几千年不变这一事实，使人们有这样的感觉，似乎它是天经地义的，不可能有多大的变化。非欧几何的出现，改变了人们的观点。它的革命思想为新几何学开辟了道路。这时许多几何理论都建筑在改变和引申欧几里得几何概念的基础上。1854年，黎曼推广了空间的概念，开创了几何学一片更广阔的领域——黎曼几何学。

非欧几何学的发现还促进公理方法的深入探讨，研究可以作为基础的概念和原则，分析公理的完全性、相容性与独立性等问题。1899年，希耳伯特对此作了重大贡献。

近世代数，是对古典代数来说的。粗略地说，古典代数的内容是以讨论方程的解法为中心的。19世纪初，一般代数方程的根式求解问题导致群的结构的研究，随后，多种代数系统（环、域、格、布尔代数、线性空间等）被建立。这时，代数学呈现崭新的面貌。它的对象扩大为向量、矩阵等等。方程论已不再是代数学的全部了。它渐渐转向代数系统结构本身的研究。

17世纪中叶，数学分析建立以后，它的进展是这样的迅速，使人来不及检查和巩固这一部门的理论基础，因而遭受种种非议。19世纪初，许多迫切需要解决的问题已基本上得到解决，于是转向基础的重建。波尔察诺开始将严格的证明导入分析中，柯西对分析学的基本概念给出一系列的严格定义。他的极限定义至今还普遍地沿用着。

柯西也是复变函数论创建者之一。19世纪70年代以后，康托尔的集合论开始发表。1901年，勒贝格在点集测度理论的基础上给出新的积分定义，奠定了实变函数论的基础。此外微分方程、微分几何、拓扑学、数理逻辑、概率论以及本世纪的泛函分析等都有很大的发展。

（五）现代数学时期
（20世纪40年代以来）

20世纪40、50年代，世界科学史上发生了几件惊天动地的大事。一是原子能的利用，以1945年7月16日在美国新墨西哥州的洛斯阿尔莫（Los Alamos）沙漠中第一颗原子弹爆炸为起点；二是电子计算机的发明，以1945年12月第一台电子计算机ENIAC[1]的制造成功为起点；三是空间技术的兴起，以1957年10月4日苏联发射第一颗人造地球卫星为起点。

---

〔1〕是 Electronic numerical integrator and calculator（电子数字积分仪与计算器）的缩写，是美国费城（Philadelphia）的宾夕法尼亚（Pennsylvania）大学为军事的目的制造的，1946年2月15日正式揭幕。参考戴曙明《电脑的起源（下）》，载《自然辩证法通讯》（1979）3期p.46。

除了这三大发明以外，还出现了许多新的情况，促使数学发生急剧的变化[1]。这些情况是：现代科学技术研究的对象日益超出人类的感官范围以外，向高温、高压、高速、高强度、远距离、自动化发展。以长度单位为例，小到1尘（femtometer，毫微微米，即10^{-15}米），大到1百万秒差距（3258000光年）。这些测量和研究都不能依赖于感官的直接经验，越来越多地要依靠理论计算的指导。

其次是科学实验的规模空前扩大，一个大型的实验，要耗费大量的人力和物力。例如一个跨音速的风洞，耗电量就相当于一个中等城市的用电。人造卫星的发射或核武器的研制耗费就更大。人类甚至要在月球上或者别的行星上建立实验室。为了减少浪费和避免盲目性，迫切需要精确的理论分析和设计。

此外，现代科学日益趋向定量化，各个科学技术领域，都需要使用数学工具。数学几乎渗透到所有的科学部门中去。例如，过去生物学很少使用数学，现在却不同，它和数学结合形成了内容丰富的生物数学、生物统计学、数理生物学等学科。甚至人类的神经系统、思维规律的研究等也用上了数学。连过去和数学关系不大的语言学，也和数学结合形成了数理语言学。其他的科学也都大量地应用数学。

数学的发展，从来就是和生产实践、科学技术的水平密切相关的。首先，生产实践和科学技术向数学提出需要解决的问题，刺激数学向这个或者那个方向发展。恩格斯说得好："社会一旦有技术上的需要，则这种需要就会比十所大学更能把科学

---

〔1〕何祚庥《数学方法在认识客观世界中的作用》，载《红旗》（1962）10期 p.28.

推向前进。"[1] 其次，生产实践和科学技术向数学提供丰富的研究资料和物质条件，电子计算机出现后使整个数学改观就是最突出的例子。最后，生产实践和科学技术还提供了检验数学结论的真理性的标准。

因此，数学的发生和发展归根结底是由生产实践决定的。但这并不等于说数学发展的每一步都由生产的需要来推动。数学发展到一定的阶段，对于生产实践有相对的独立性。由于它自身形成了一个逻辑体系，有了丰富的积累，在这个基础上可以进行新的概括，或者为了解决内在的矛盾，常常产生一些新的理论。

上述这些情况，使得本世纪40年代以后，数学发生了巨大的飞跃。这就是现代数学时期的开始。[2]

中国社会的发展具有和西方不同的特点，它较早地进入封建社会，而长期停滞在封建制（后来是半封建半殖民地）之中。因此数学的发展也略有不同，整个发展可分为六个时期：

（一）先秦萌芽时期（从远古到公元前 200年）；

（二）汉唐始创时期（公元前 200年—公元1000年）；

（三）宋元全盛时期（公元1000年—14世纪初）；

（四）明清西学输入时期（14世纪初—五四运动）；

（五）近代数学时期（五四运动到新中国成立）；

（六）现代数学时期（解放后）。

---

〔1〕《恩格斯致瓦·博尔吉乌斯》(1894)，《马克思恩格斯选集》第四卷 p.505。

〔2〕现代数学的某些特点见本书第十二章。

第二章　萌芽时期的数学（上）

恩格斯在《反杜林论》中用下面的话说明数学的起源："数学是从人的需要中产生的：是从丈量土地和测量容积，从计算时间和制造器皿产生的。"[1] 又在《自然辩证法》中说："必须研究自然科学各个部门的顺序的发展．首先是天文学——游牧民族为了定季节，就已经绝对需要它．天文学只有借助于数学才能发展．因此也开始了数学的研究。"[2]

古代数学的发展同天文学有着不可分离的关系，而天文学的发展是由农业和畜牧的需要所引起的．世界上最古老的几个国家都位于大河流域：黄河流域的中国；尼罗河下游的埃及；幼发拉底河与底格里斯河的巴比伦；印度河与恒河的印度．这些国家都是在农业的基础上发展起来的．从事耕种的劳动人民，日出而作，日入而息，他们必须掌握四季气候变迁的规律；游牧民族的迁徙，也要认清方向，白天以太阳为指南，晚上以星月为向导．因此，在世界各民族文化发展的过程中，天文学总是发达较早的科学，而天文学又推动了数学的发展。

〔1〕汉译本(1970)p.35.原文本(1959柏林版)p.45.

〔2〕汉译本(1971)p.162.原文本(1959柏林版) p.195.

第一节 埃 及

埃及是文化发达最早的几个地区之一．它位于尼罗河两岸，一部分是夹在两个高原中间的狭长谷地，叫做上埃及，一部分是尼罗河三角洲，叫做下埃及．大约在公元前4000年，就有着南北两个不同的王国，为了占有全埃及而进行长期的斗争．到公元前3200年，完成了南北的统一，建都在下游的孟斐斯(Memphis)．[1]

尼罗河定期泛滥，通常自七月中旬开始，淹没全部谷地．十一月洪水逐渐退落，土地上遗留着肥沃的淤泥．正月，在松软的土壤里播种，湿润的土地很容易耕垦，并有丰富的收成．

人们在长期的农业生产中积累了许多天文知识．譬如他们注意到当天狼星[2]和太阳同时出没之时，就是尼罗河洪水将至之兆．经过多年的观察，确定这种现象365天重复一次，于是规定365天为一年[3]，这比真正的回归年约少6小时．

一般的历史学家都承认埃及的几何学起源于尼罗河泛滥后土地的重新测量．其说出自希罗多德(Herodotus, 'Ηρόδοτος, 约公元前484—424年)．希罗多德是古希腊的大历史学家，被称为"历史之父"．他在公元前5世纪访问过埃及，根据他搜集的资料和从祭司们所得到的报道，在《历史》一书中作这样

〔1〕参考 Ahmed Fakhry《埃及古代史》(Ancient Egypt)，高望之等译，(1956)．

〔2〕天狼星，拉丁名 Sirius，来自希腊文 Σείριος，原意是"灼热的"．西方称为狗星(Dog star)，它的光辉是全天恒星之冠，所以特别引人注目．

〔3〕参考（1）朱文鑫《天文学小史》（上）(1935)p.67.（2）W. C. Dampier《科学史》(A History of Science)，李珩译，(1975)p.37.

的叙述："塞索斯特里斯(Sesostris)[1]在全体埃及居民中间把埃及的土地作了一次划分．他把同样大小的正方形的土地分配给所有的人，而要土地持有者每年向他缴纳租金，作为他的主要岁收．如果河水冲跑了一个人分得的土地的任何一部分，这个人就可以到国王那里去把发生的事情报告给他；于是国王便派人前来调查并测量损失地段的面积；这样今后他的租金就要按着减少后的土地的面积来征收了．我想，正是由于有了这样的做法，埃及才第一次有了几何学，而希腊人又从那里学到了它．"[2]

古埃及的宗教深信人死后，在保存其尸体不腐和具备生活的一切用品的条件下，还可以继续活着．于是他们将尸体加工制成木乃伊；而坟墓，作为死者的住所，建筑得越坚固越好．特别是法老的坟墓更应该是永久不坏的建筑．所以每一个法老上任以后，就为自己建造陵墓．

第三王朝初年，坟墓的基本型式是石砌的长方体．第四王朝(约公元前2900年)以后，坟墓改成现在举世闻名的金字塔．法老库夫（Khufu 或称齐阿普斯Cheops)、卡夫拉(Khafra)等在基查（Gizeh，在古都孟斐斯附近)为自己建造了巨大的金字塔．库夫金字塔是最大的一个，原高146.5米（现因损坏高137米)，基底正方形每边长233米（现长227米）．在1889年

---

〔1〕从上、下埃及统一（公元前3200年）到波斯人征服埃及（公元前525年）为止，共更替了二十六个王朝．古埃及的国王叫做法老（Pharaoh)．希腊人把第十九王朝的法老拉美西斯第二(Rameses Ⅱ，约公元前1300年)叫做 Sesostris．

〔2〕希罗多德《历史（希腊波斯战争史）》(Herodoti, Historiae)，王嘉隽译，（1959）p.321．

巴黎铁塔（300米高）落成之前，它一直是世界最高建筑物，卡夫拉金字塔略小。

从库夫金字塔本身的结构，可以推知四、五千年前的埃及人不但有高度的建筑技巧，而且懂得不少几何知识。根据现代人的研究，推知底边长度的误差仅仅是1.6厘米，是全长的$\frac{1}{14000}$。基底直角的误差只有12″或直角的$\frac{1}{27000}$。[1]金字塔的四个面正向着东南西北，底面正方形两个边与正北的偏差，一个仅仅是2′30″，一个是5′30″。[2]

17世纪的时候，许多欧洲探险队到埃及去发掘古物。18世纪末在尼罗河西岸罗赛塔（Rosetta）地方发现一块石碑（现藏伦敦博物馆，叫做罗赛塔石）（图1）。上面刻有三种文字：下面是希腊文，上面是埃及的古体象形文字，中间是埃及的草体文[3]。根据这一线索，法国学者商博良（Jean François Champollion，1790—1832）逐步揭穿了象形文字的秘密，到1822年完成了译读的任务。

现在我们对古埃及数学的认识，主要是根据两本用象形文字写成的纸草书。[4]一本是伦敦本，一本是莫斯科本。前者在底比斯（Thebes）埃及古都的废墟中发现，1858年为莱因特

---

〔1〕D. E. Smith, History of Mathematics, vol. I (1923) p.43.

〔2〕V. Gordon Childe《远古文化史》(Man Makes Himself)，周进楷译，(1954) p.208.

〔3〕高崎昇《古代エジプトの数学》(1937).

〔4〕纸草是盛产在尼罗河三角洲的一种水生植物.形状象芦苇.把茎逐层撕成薄片,就可以写字."纸草"拉丁文是 papyrus，许多欧洲文字中的"纸"都从它变来，如英文 paper，法文 papier，德文 Papier，俄文 папка（马粪纸）等.



图1　罗赛塔石的一角

(A. Henry Rhind)所购得，以后为伦敦博物馆所有，通常叫做莱因特纸草书．长550厘米，宽33厘米，摹本出版于 1898年（图 2）．这是埃及僧人阿默士（Ahmes）所著，[1]记载千余

〔1〕关于它的年代有几种说法：公元前1550年（D. E. Smith）；公元前1650年(D. J. Struik)；公元前1700年（A. Eisenlohr)；还有的认为是公元前1700—2000年的．

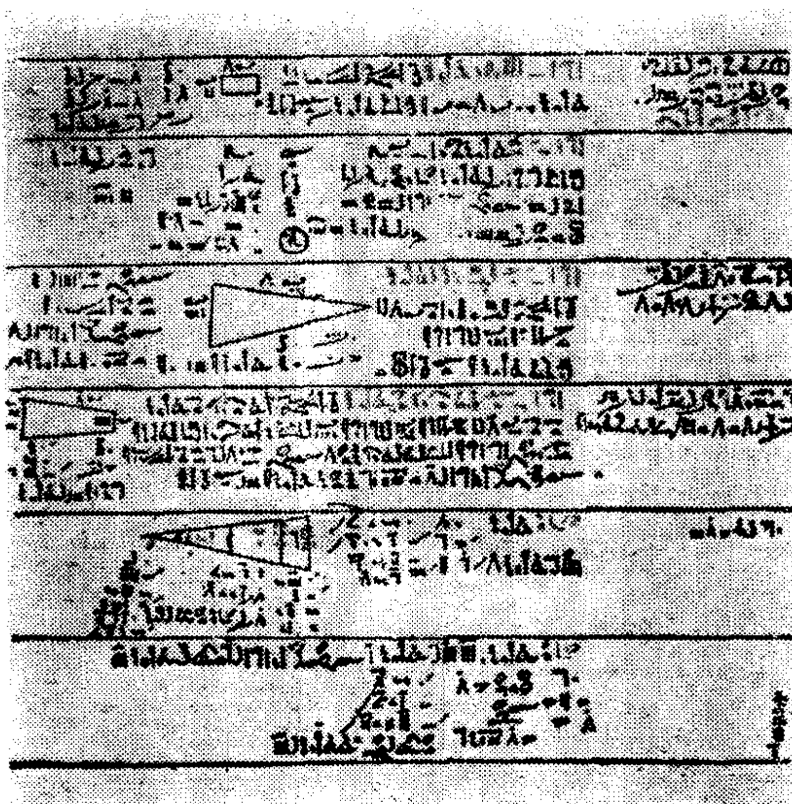


图2 莱因特纸草书的一部分

年以来（可能追溯到大金字塔时代）的一些数学问题。书名是《阐明对象中一切黑暗的、秘密的事物的指南》。全书分三章，一是算术；二是几何；三是杂题，共有题目85个，大概是当时的一种实用计算手册。[1]

莫斯科本是俄罗斯收藏者在1893年获得的，1912年转为莫斯科博物馆所有。[2]它的年代大约是公元前1850年。上面载有25个问题，可惜缺去卷首，不知书名。这书由苏联的土拉叶夫（Б. Тураев，1868—1920）加以研究，1930年斯特鲁威（В.В.

〔1〕A. B. Chase, The Rhind Mathematical Papyrus (1927).这是莱因特纸草书的英译本。

〔2〕И.Депман, Из истории математики (1950) p.6.

Струве)完成它的出版.[1]另外还有一些很晚的纸草书，甚至是罗马时代的，然而内容却没有多大的进步.

埃及人很早就用10进记数法，但却不知道位值(place value)制．所谓位值制，就是一个数码表示什么数，要看它所在的位置而定．如23和32使用两个相同的数码，但23中的2放在十位上，表示20，32中的2放在个位上就表示2．用10进位值制记数法，1,2,…,9,0十个数码可以将任何数表示出来．埃及的记数法却不是这样，每一个较高的单位是用特殊的符号来表示的．例如 111，埃及象形文字记作

，

表示1，　表示10，　表示100．而

1,000,000画成一个好象是受惊的人[2] 

在这种记数法的基础上，埃及的算术主要是加法，而乘法就是加法的重复．例如11×13，先将11乘以2，再乘以4，再乘以8，然后将与1，4，8的积加起来（即将打*号的数加起来，

[1] А. П. Юшкевич《数学史》(三十年来的苏联数学) 关肇直译，(1953) pp. 18—19.

[2] F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1928) p.12.

1	11*
2	22
4	44*
8	88*

得答案143）．[1]

有趣的是，这种基于“倍乘”的算法，曾在不同的世纪，不同的民族中出现过．例如“俄罗斯农民乘法”就是用“倍乘”、“平分”与加法来代替乘法的．[2]

纸草书中有的问题属于一元一次方程．例如莱因特纸草书的第11题是：“一个数的$\frac{2}{3}$，加上这个数的$\frac{1}{2}$，再加上它的$\frac{1}{7}$，再加上这数本身等于37，求这个数．”这相当一元一次方程

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x+x=37.$$

占有特别重要地位的是埃及人的分数算法．他们把所有的分数都化成单分子分数，除$\frac{2}{3}$之外，所有分数的分子都是1，$\frac{2}{3}$是用特别的记号表示的．

莱因特纸草书用很大的篇幅来记载$\frac{2}{n}$型的分数分解成单分子分数的结果（n从5到331）．

---

〔1〕Dirk J Struik《数学简史》(A Concise History of Mathematics)，关娴译，(1956)p.13.

〔2〕И. Депман《数学故事》(Рассказы О Математике)，齐全译，(1957) p. 89.

如 $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$，　$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$，

$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$等。[1]

这种分数算法使得埃及算术带有一种冗长的、十分费事的特点，实际上妨碍了数学进一步的发展。这种分解需要一定的计算技巧。究竟他们是用什么方法来得到这些结果的，这倒是一个有趣的问题，曾有许多学者提出种种学说来解释它的来源。[2]

有一些应用问题，涉及粮食、酒类、动物的饲养、谷物的贮藏等等，这说明了算术的实际来源。其中有的题颇饶趣味。如"将 100个面包分给 5 个人，使成等差数列，且头两人所得是后三人的$\frac{1}{7}$"。答案是 $1\frac{2}{3}$，$10\frac{5}{6}$，20，$29\frac{1}{6}$，$38\frac{1}{3}$。

莱因特纸草书第 79 题，在数字 7，49，343，2401，16807 旁边各注有图、猫、鼠、大麦、量器等字样，但丝毫没有说明题目的意思。

两千多年后，意大利斐波那契的《算盘书》（1202）中有这样的等比数列题："7 个老妇同赴罗马，每人有 7 匹骡，每匹骡驮 7 个袋，每个袋盛 7 个面包，每个面包带着 7 把小刀，每把小刀放在 7 个鞘之中，问各有多少？"受到这问题的启

---

〔1〕这种分解并不是唯一的，可以分成两个、三个或更多的单分子分数，而纸草书中仅列一种分法。一般说，如果 n是奇素数，那么 $\frac{2}{n}=\frac{1}{(n+1)/2}+\frac{1}{n(n+1)/2}$，例如$\frac{2}{97}=\frac{1}{49}+\frac{1}{4753}$。

〔2〕А. П. Юшкевич《数学史》(三十年来的苏联数学)关肇直译，(1953) p.19。

发，德国著名的数学史家M·康托尔（Moritz B. Cantor, 1829—1920）认为阿默士的原意是："有7个人，每人养7只猫，每只猫吃7只老鼠，每只老鼠吃7棵麦穗，每棵麦穗可长成7个量器的大麦，问各有多少？"[1]

这类问题，在19世纪初又以歌谣体出现在算术书中[2]：

"我赴圣地爱弗西（Ives），
途遇妇女数有七，
一人七袋手中提，
一袋七猫数整齐，
一猫七子紧相依，
妇与布袋猫与子，
几何同时赴圣地？"

纸草书还有一些几何计算问题。莱因特纸草书给出计算圆形土地面积的方法：圆面积等于直径减去它的$\frac{1}{9}$，然后再平方。所给例子直径是9个单位，减去它的$\frac{1}{9}$，剩下8，8的平方是64，这就是圆的面积。这相当于使用$\pi=3.16049$。误差是很小的。[3]

古埃及数学最光辉的成就可以说是四棱锥台体积公式的发现。莫斯科纸草书有这样一个例子（第14题）：正四棱台上底边长2，下底边长4，高是6，体积是$4^2+2\cdot4+2^2$再乘上6

〔1〕F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p.13.

〔2〕1801年美国阿丹斯（Daniel Adams）所著的书.

〔3〕设直径是d，则面积应是$\frac{\pi d^2}{4}=\left(d-\frac{d}{9}\right)^2=\frac{64}{81}d^2$，于是$\pi=256/81=3.16049$.

的1/3，得56。

这正好是将上底边长 $a=2$，下底边长 $b=4$，高 $h=6$ 代入公式 $V=\frac{h}{3}\ (a^2+ab+b^2)$ 的结果。[1]

上面的叙述是现代人加以推测整理的结果，实际纸草书上没有说上、下底是正方形。附图（图3）只是一个画得很粗糙



图3　莫斯科纸草书第14题

的梯形，看不出是一个四棱台。因此这仍然是一个疑点。[2]

直到现在为止，还没有发现古埃及人知道勾股定理的迹象。大金字塔的正确方位，可能是由天文观测得到的。但怎样解释底面直角的误差非常小呢？历史学家（如M.康托尔）猜测他们也象古代的中国人一样，知道边长是3:4:5的三角形必定是

〔1〕V. G. Childe《远古文化史》(Man Makes Himself)，周进楷译，(1954) p.197.

〔2〕Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) p.20.

В. В. Струве, Древний восток (1958) p.81.

直角三角形的道理。据此作出直角。[1] 这一说法相当流行，但它是没有证据的。因为作直角也还可以采取别的简单办法[2]。

古埃及人的面积计算有时是错误的。如等腰三角形的腰是10，底是4，他们求得面积等于20，是底乘腰之半而不是底乘高之半。

总的来说，古代埃及人积累了丰富的实践经验，但上升为系统的理论，还有待进一步去完成。

第二节 巴 比 伦

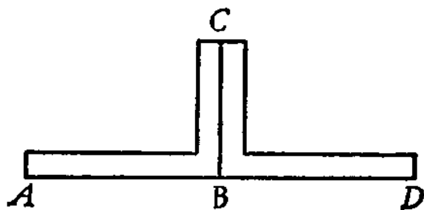
亚洲西部的底格里斯河与幼发拉底河之间的地带，通常叫做两河流域，和尼罗河流域一样，也是人类文化的摇篮。

大约在公元前二千年，这里建立了巴比伦王国（Babylonia），首都是巴比伦（Babylon）。位于现今伊拉克境内，巴格达南约100公里。早在公元前四、五千年，在两河流域就住着苏美尔人（Sumerian），他们创造了一种楔形文字（cuneiform），以后传给巴比伦人和波斯人。那里没有尼罗河畔的纸草，文字最初是刻在石上的，以后改用泥板。先用削尖的木笔在软泥板上刻写，然后烧或晒干，使它坚硬如石（图4）。字的形状象楔子，所以叫楔形文字。这种文字被埋没在地底下数千年

---

〔1〕F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p.10.

〔2〕例如，先大致作一个直角尺（如木工用的曲尺），放在ABC位置，再翻过来放在DBC位置，如果ABD成一直线，∠ABC就是直角，否则再将∠ABC加以调整。



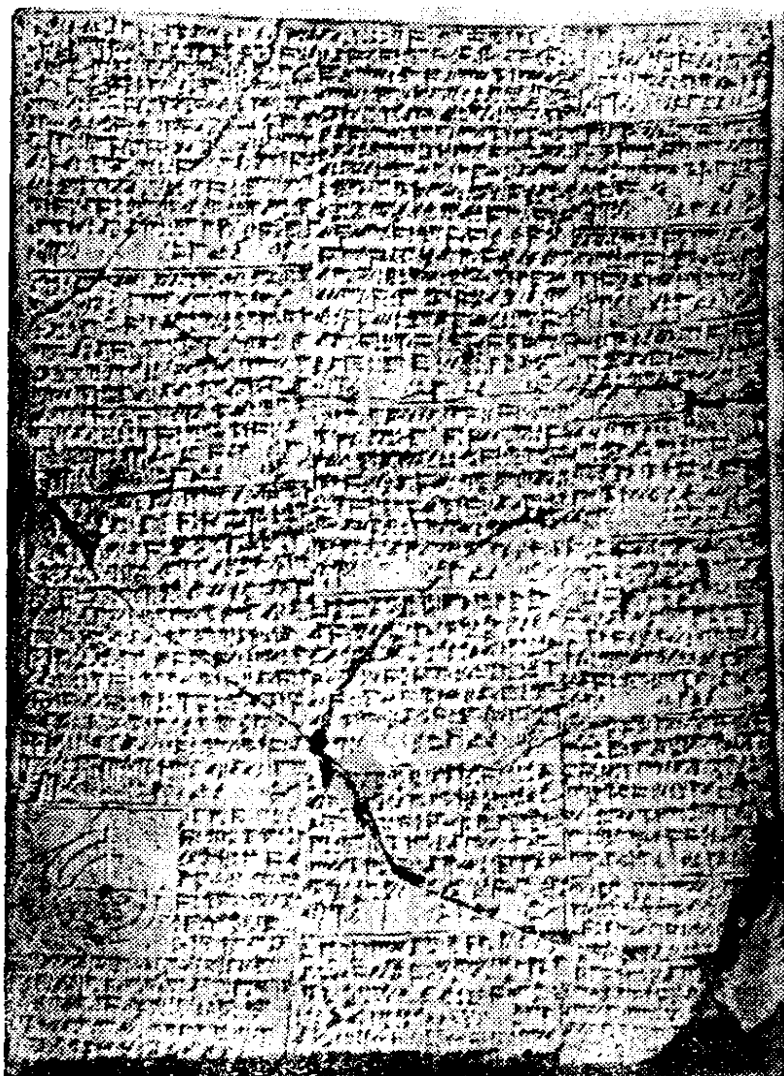


图4　刻有楔形文字的泥板

之久，直到一百多年前才为现代人所知.

从此以后，学者们就通过大量的泥板去探索当年两河流域的情况.

公元前三千年，苏美尔的商人就知道使用帐单、收据、票据等物，这时期没有任何一个地区象他们那样熟悉商业数学.

在一切古代民族中，天文学总是发达较早的一门科学. 这一方面由于农业的需要，另一方面与古人大多迷信天象和人事

的凶吉有关，从而有占星之术。占星者时时注意日月星辰的运行，便有可能逐渐发现其中的规律，于是产生了天文学。

苏美尔和巴比伦的占星祭司们经常在庙塔顶的平台上进行天象观测，积累了丰富的知识。他们开始把恒星和行星分辨开来，给五个行星以特殊的名称，将天空分为星座[1]，并创用了最早的阴历。这种阴历以春分为岁首，第一个月是以“公牛”(Bull) 来命名的。由此可知这种历法的建立必在春分点位于金牛座(Taurus)之时，这大约在公元前4700年[2]。无论制定哪一种历法，先决条件是要有一定的数学知识。因此可以推想在五、六千年前或更早，两河流域的居民已经知道某种数字系统和某种形式的算术计算了。

每一个阴历年包含12个朔望月，比回归年少11天多，这误差是用闰月来纠正的。汉穆拉比 (Hammurabi，巴比伦最有名的国王) 统治时期(公元前1792—1750年)，增加闰月是用命令来执行的。

到了迦勒底 (Chaldea) 王国 (或称新巴比伦，公元前626—538 年) 时期，学者们测定了五大行星的周期，并发现了驰名古今的预测日、月食的“沙罗周期” (Saros 或 Chaldean period) [3]。这是天文学方面的伟大贡献[4]。

---

〔1〕他们分黄道星座为十二宫，并以巨蟹、双子、天蝎、双鱼等来命名，一直流传至今。见朱文鑫《天文学小史》(上) p.62. 涂厚善《古代两河流域的文化》 (1964) p.67.

〔2〕D. E. Smith, History of Mathematics, vol.I (1923) p.37.

〔3〕一个沙罗周期相当于223个朔望月或 6585.3211天，合 18年11日。粗略地说，某年某日有日食发生，那么18年又11日以后也将有类似的日食发生。自然，食象和见食地点是有相当差异的。

〔4〕朱文鑫《天文学小史》 (上) (1935) p.63.

后来希腊的塔利斯以预告日食停止了两个国家的战争，著称于史册，大概就是根据沙罗周期推得的。

一个星期有7天；全圆周分为360度，每度60分，每分60秒；一小时也有60分，每分60秒。这在今天已经习以为常，很少人去查问它的来历。实际我们是沿袭了远古巴比伦的制度[1]。

巴比伦人采用60进制记数法。为什么要用60作为进位的基数呢？后人有种种猜测。有些人认为巴比伦人最初以360天为一年，将圆周分为360度，太阳就每天行一度[2]。又圆内恰好可以连续作6条等于半径长的弦，每一条弦所对的弧是60度，基数60或者由此而来。另一种意见认为巴比伦人很早就知道每年有365天，所以前面的说法是不可信的。60这个数字的选择是因为它是许多简单数字2、3、4、5、6、10、12、…的倍数，而$60=12\times 5$，12是一年包含的月数，而5是一只手的手指数目。[3]

这种60进位制最初是兴克斯 (Hincks) 于1854年在泥板上发现的。[4]这些泥板大约是公元前2300—1600年的遗物，上面记有1^2到60^2的平方数表和1^3到32^3的立方数表。平方表前7个

---

〔1〕一星期的七天，是按日、月以及自古以来就知道的五个行星——火、水、木、金、土来命名的。《旧约圣经》记载，希伯来 (Hebrew) 族的远祖亚伯拉罕(Abraham)约于公元前2300年从巴比伦南部迁居西欧，这古老的制度，得以流传后世。参考 W. Libby《西洋科学史》(An Introduction to the History of Science) 尤佳章译，(1933) p.2.

〔2〕“度”英文 degree，法文 degré，德文 Grad，来自拉丁文 degradare，原是“步”、“级”的意思。

〔3〕此外还有多种说法，见 И.Г. Башмакова, А. П. Юшкевич《记数制度溯源》，载《初等数学全书，1卷1分册，算术》，刘绍祖译，(1959).

〔4〕F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. Ⅰ (1928) p.2.

数字是1，4，9，16，25，36，49，第8个以后是 1.4＝8^2，1.21＝9^2，1.40＝10^2，2.1＝11^2 等等．如果不是按60进制去理解的话，怎么也解释不通．写成60进制，问题就迎刃而解：1.4＝$1\times60+4=8^2$，1.21＝$1\times60+21=9^2$，……

另一块泥板记载月面自朔至望每天的月相[1]设全面积是240，最初5天的月相成等比数列：5，10，20，40，1.20（＝80）．由此可以看到60进制．以后从第5天到第15天变成等差数列：1.2，1.36（＝96），1.52（＝112），2.8（＝128），2.24（＝144），2.40（＝160），2.56（＝176），3.12（＝192），3.28（＝208），3.44（＝224），4（＝240）．这和实际情况颇有出入．猜想这些数字是根据观测结果凑合成的．虽然如此，还是看出他们已开始细心注意各种天象的变化，并企图用数字表达出来，同时已知等差、等比数列．

巴比伦人的60进制记数法采用了位值制[2]．位值制的道理，古代的埃及、希腊、罗马人是不知道的．位值制是千百年人类智慧的结晶，它可以同字母的发明相媲美，两者都是用少数简单的记号来代替复杂难记的符号．

巴比伦的记数法，　　表示1，　　表示10，

$=1\times60^2+21\times60+16=4876.$[3]

1　　21　　16

〔1〕从地面上所见月面明亮部分与月面全面积之比，叫做月相．

〔2〕见本章第一节，p.21．

〔3〕А.А.Вайман，Шумеро-вавилонская математика(1961)．

完整的位值制记数法，必须有表示零的记号，但在早期的泥板上没有发现零号，因此巴比伦的位值制并不十分明确。例如(5,6,3)可以表示$5\times60^2+6\times60+3=18363$，也可以表示$5\times60^1+6\times60^0+3\times60^{-1}=306\frac{1}{20}$。究竟表示什么，要根据上、下文来确定。

零号的发明虽然是位值制的必然产物，可是须在计算技术相当完备之后才有可能。较晚（公元前6世纪以后）的泥板有时用空出一格来表示"零"。约在公元前200年，才有零号的记载，但还未用在计算之中。

另一个懂得位值制的民族是公元初居住在中美洲尤卡坦(Yucatan)半岛（墨西哥东部）的印第安人马雅（Maya）部族。他们采用二十进位值制来记数。●表示1，——表示5，$\overset{\cdots}{\equiv}$表示13等等。猜想点是石子的形象，横是小棒，而零号好象半闭的眼睛，（眼形符号）大概是贝壳[1]。

近几十年来，诺依格包尔(Otto Neugebauer,1899-)等人诠释了很多楔形文字的泥板，大大丰富了关于巴比伦的知识，对巴比伦数学给出比过去更高的评价。

他们发现汉穆拉比时代（公元前18世纪）的泥板有二次方程的问题，并看出从算术到代数的过渡。例如："两个正方形面积之和是1000，其中一个的边长是另一个边长的$\frac{2}{3}$少10，问各长多少？"这相当于解联立方程

[1] F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. Ⅰ (1928) p.43.

$$x^2+y^2=1000, \quad y=\frac{2}{3}x-10.$$

答案是 $x=30$，$y=10$。

实际的解法仅限于指出某些简单的数字关系：将10平方得100，1000减去100得900，等等[1]。

诺依格包尔甚至认为巴比伦人已掌握三次或四次方程的解法。但苏联的鲁列（С.Я.Лурье）对此表示异议[2]。

从公元前15世纪的泥板上，知道这个时期的人已会计算矩形、直角三角形、梯形等图形的面积，以及平行六面体、柱体的体积。并知道 $(a+b)^2$ 的展开式[3]和一般的勾股定理[4]。

公元前6到3世纪，数学受到天文学更强烈的影响，这时数学具备更高的计算技巧。出现过17位60进的数字计算，这种复杂的数字业已超过了税租或测量的要求，可能是受到天文问题的刺激或出于爱好计算者之手。当时很多的计算是靠数表来进行的。包括简单的乘法表，平方、立方表。有一种表记载 n^3+n^2 的数值，可能为了解 $x^3+x^2=a$ 这类三次方程而设[5]。

他们用 $\frac{17}{12}$ 表示 $\sqrt{2}$，$\frac{17}{24}$ 表示 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的近似值，这是非常杰出

---

〔1〕Dirk. J. Struik, A Concise History of Mathematics (1954) p.26.

〔2〕见 А.П. Юшкевич 《数学史》（三十年来的苏联数学），关肇直译，(1953) p.18.

〔3〕D.E. Smith, History of Mathematics, vol. I, p.40.

〔4〕А.А.Вайман, Шумеро-вавилонская математика (1961) p.129. D.J.Struik, A Concise History of Mathematics, p.28.

〔5〕苏联维协洛夫斯基(И.Н. Веселовский) 对此表示怀疑。见 А. П. Юшкевич 《数学史》 p.18.

的[1]. 平方根近似公式$\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$ (b 甚小) 已被广泛地应用.

令人奇怪的是, 在巴比伦数学中竟没有找到比 3 更好的圆周率.

楔形文字的记载还牵涉到复利的问题: "设利率是20%, 何时能使本利和是本金的 2 倍?" 这导致指数方程 $(1.2)^x=2$. 解法是: 首先注意到 $3<x<4$,然后可能是用线性内插法得到[2]

$$4-x=\frac{(1.2)^4-2}{(1.2)^4-(1.2)^3}=0.21296\cdots. \qquad (1)$$

于是 $x=3.7870\cdots$. 原指数方程的解应是 $x=3.80178\cdots$,相对误差还不到0.4%!

第三节 印 度

印度在历史上屡次遭受外族的侵略. 公元前 500 年左右波斯王大流士征服了印度一部分土地. 公元前 326 年马其顿王亚

---

[1] 应注意$\frac{17}{12}$是$\sqrt{2}$的渐近分数之一. 即任何其他分数, 只要分母不超过12, 必定没有$\frac{17}{12}$那么接近$\sqrt{2}$. 然而$\frac{17}{24}$却不是$\frac{1}{\sqrt{2}}$的渐近分数, $\frac{12}{17}$比$\frac{17}{24}$ 更近真值, 而分母较小.

[2] 命$f(x)=(1.2)^x-2$, 在$[a,b]$上用线性内插公式 $x=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$, 从而有 $b-x=\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$. 以 $a=3$, $b=4$ 代入即得(1)式. 原式是用60进制记数法. 见 A.A.Вайман, Шумеро-вавилонская Математика (1961) p.68. D.Struik, A Concise History of Mathematics, 1948年版 (以及汉译本) 此式有误, 1954年版已改正过来.

历山大侵入旁遮普．因而早期的印度数学就受到巴比伦和希腊的影响．后来又受到中国的影响．当然他们也有很多独特的创造，最为人所熟知的是数码的书写和零号的发明，前者演变成现今的印度—阿拉伯数码 1,2,3,…,9,0,而“零”是位值制记数法的精髓．

印度的数学和占星术有关，而占星术又和宗教与农业有密切联系．他们的数学书籍带有浓厚的宗教气味，将计算方法和结果用语句难懂的诗歌写出来，以致后人不易了解．

印度古代没有纸，中国的纸大约是 7 世纪末传到印度去的．在这之前，印度的文字除了极少数是刻在石上、竹片、木片或铜器上之外，大量是写在白桦树皮和树叶子上的．喜马拉雅山下有很大的一片桦树林，公元前若干世纪，印度人就已经使用这种树皮．写字的叶子，是一种大叶棕榈树的叶子．中国和尚〔如唐玄奘（602—664）〕去印度取来的佛经，几乎都是这种叶子写的经．直到11世纪以后，印度才有纸写的典籍[1]．

也许是树皮和树叶子不好保存，印度数学在 7 世纪以前缺乏可靠的史料，因此了解得很不够．

在举行宗教仪式的祭坛的建筑法规中，有一种“绳子的规则”(S’ulvasūtras, the rules of the cord)，它包含着某些可以追溯到公元前 5 世纪或更早时期的印度数学知识．其中有勾股定理和勾股数（即满足方程 $x^2+y^2=z^2$ 的正整数组），并有不可通约量的迹象．还有单位正方形对角线的长度的近似值

〔1〕季羡林《中印文化关系史论丛》(1957) pp.100—127.

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot34},$$

这数值等于1.414215686，是$\sqrt{2}$相当好的近似值[1]。又给出

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot29}-\frac{1}{8\cdot29\cdot6}+\frac{1}{8\cdot29\cdot6\cdot8}\right)^2$$

$$=18(3-2\sqrt{2}).$$

这数值等于3.088，比 $\pi=3$ 好不了多少。

但在耆那教(公元前 6 世纪在印度兴起的一种宗教)的经典中，却可以找到较好的$\pi=\sqrt{10}=3.162$.[2]

后来的数学著作没有再出现“绳子的规则”所取得的成果。也许是印度幅员辽阔，文字不统一，以致缺乏交流和继承的传统。

《太阳的知识》(Sūrya Siddhānta) 是印度第一本完整

〔1〕李俨认为这是重复使用平方根近似公式$\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a}$的结果。设A是被开方数，上式可写成$\sqrt{A}\approx a+\frac{A-a^2}{2a}$。取$\sqrt{2}$的第1近似值$a_1=1$，代入公式右端得第 2 近似值$a_2=a_1+\frac{2-a_1{}^2}{2a_1}=1\frac{1}{2}$，再代入一次，得第 3 近似值 $a_3=1\frac{1}{2}+\frac{2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{17}{12}$，再代入得第 4 近似值 $a_4=\frac{17}{12}+\frac{2-\left(\frac{17}{12}\right)^2}{\frac{7}{6}}$ $=\frac{17}{12}-\frac{1}{3\cdot4\cdot34}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot34}$。见李俨《中算史论丛》(一)(1954) p.77.

〔2〕D.J.Struik, A Concise History of Mathematics (1954) p. 33.

保存下来的重要科学著作，大约写于5世纪[1]。它总结了早期印度的三角学。这本书和希腊托勒密的著作有一显著的差异，就是造表不取全弦而取半弦，相当于现在的正弦线。后来发展成三角函数的“正弦”[2]。

〔1〕10世纪的乌兹别克学者阿尔比鲁尼（Albîrûnî，973—1048）曾在印度多年，说这书的著者是拉塔（Lāta）。D. E.Smith, History of Mathematics, vol. Ⅰ, p.145.

〔2〕V. Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p.295.

第三章 萌芽时期的数学（下）

（中国先秦时期的数学和某些有关问题）

第一节 引 言

从1927年起，考古学家在北京西南约48公里的周口店龙骨山进行发掘，发现“北京猿人”的骨骸化石及其他文化遗迹[1]．证明了在五、六十万年以前在我国的疆土上就有原始人类生活着．

黄河流域新石器时代晚期“仰韶文化”[2]和“龙山文化”[3]的发现，证明在六、七千年前黄河流域等地区已经有了农业、畜牧业，会制造采陶，加工石器和纺织缝纫[4]．发掘出来的陶器已有各种几何图案．

到了殷商（公元前14世纪），开始有了青铜器铭文和甲骨文的记录．铜器铭文自古就有流传．甲骨文是殷商后半期的遗物．那时的人很迷信，用龟甲兽骨占卜吉凶，占卜之后，常在

〔1〕第一个完整的头骨发现于1929年12月2日，见贾兰坡《中国猿人》(1954) p. 21. 1963年在陕西蓝田发现“蓝田猿人”化石，1965年5月1日在云南元谋发现“元谋猿人”化石，比北京猿人还要古老．

〔2〕以最早在河南渑池县仰韶村发现而得名．

〔3〕以最早在山东省章丘县龙山镇发现而得名．

〔4〕考古研究所《新中国的考古收获》(1961) p. 8．

甲骨上刻写卜辞和一些有关的事情，这就是甲骨文．殷纣（公元前11世纪）亡国，都城成了废墟，甲骨埋没在地下．1899年（清光绪25年）起，在河南省安阳县西北3公里的小屯村挖出很多甲骨，上面的文字才开始为人所知[1]．

从这些文化遗迹的发现，知道我国在数千年前已经有了高度的文化．和其他古国一样，由于农业、畜牧业生产的需要，逐渐有了数学．

农作物的下种收成和四季气候息息相关，所以自古就注重历法．世界上没有任何一个国家象中国那样改革历法达数十次之多[2]．制定历法没有数学是不行的，因此促进了数学的发展．

第二节　十进位值制记数法

我们现在通用的记数法是十进位值制[3]记数法．十进制显然和人类有十个指头有关．恩格斯在《反杜林论》[4]中说："数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的．人们曾用来学习计数，从而用来作第一次算术运算的十个指头，可以是任何别的东西，但是总不是悟性的自由创造物．"这指出十进制的根源．初学算术的儿童，总是拿十个手指来帮助计算．大人有时也不免用手指表示数．

〔1〕胡厚宣《殷墟发掘》(1955)．郭沫若认为中国文字到了甲骨文时代，至少经过了两三千年的发展．见《奴隶制时代》(1973) p. 250．

〔2〕朱文鑫《天文考古录》(1933)列出我国古今历法一百种以上，实际使用过的也有四十多种．另见胡继勤《时间和历法》(1963)．

〔3〕见本书第二章第一节．p. 21．

〔4〕译文(1972) p. 35．原文本（1959柏林版）p. 44．

中美洲的马雅人懂得位值制的道理，但用的是20进制．巴比伦人也知道位值制，而用的是60进制[1]．使用位值制而又是十进的，以中国人为最早．

甲骨文和金文（铸在铜器上的文字，也叫钟鼎文）早已使用十进制[2]．

后来用算筹来记数，十进位值制就十分明确．算筹是什么时候开始使用的，年代已遥不可考．现在看到的实物，最早的是1971年8月在陕西千阳县一座西汉墓中出土的骨质算筹[3]．从开始的粗糙竹制算筹到后来用骨、玉造的精细算筹，中间必定经过很长的岁月．

司马迁《史记》（约公元前104—91年成书）《高祖本纪》载："夫运筹策帷幄之中，决胜于千里之外，吾不如子房．"子房就是张良（？—公元前185年）．可见公元前2、3世纪，算筹的运用已达到相当纯熟的地步[4]．算筹的出现不会晚于公元前3世纪，大概可以上推到战国初期（公元前5世纪）[5]．

用算筹表示数目，有纵横两种方式[6]，

〔1〕苏美尔人也用过十进记数法，但不是位值制的．埃及人也使用非位值的十进制．印度的十进制数码在6、7世纪才出现．

〔2〕郭沫若《甲骨文字研究》，《释五十》(1962)．

〔3〕《考古》(1976) 2期 pp．85—88．又夏鼐《考古学和科技史》(1979) p．3．

〔4〕算筹制度的发展，见李俨《中算史论丛》（四），《筹算制度考》(1955)．钱宝琮《古算考源》，《记数法源流考》(1928)．李约瑟《中国科学技术史》译本第三卷，(1978) pp．153—157．

〔5〕三上义夫认为算筹的使用恐怕还在"书契"（文字，或用刀刻的文字）之前．见三上义夫《中国算学之特色》林科棠译(1929) p．45．

〔6〕钱宝琮《中国数学史》(1964) p．8．李俨，杜石然《中国古代数学简史》（上）(1963) p．12．

纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

记数时，个位常用纵式，其余纵横相间．例如6728表示作𝍮𝍦𝍪𝍧．6708表示作𝍮𝍦　𝍧，空一格的地方表示零．个位是零也能表示出来，如6720表示作𝍮𝍦𝍪　．由于各位数字纵横相间，所以不致看错．位值制的关键是零号，没有表示零的方法，位值制就不完备．巴比伦人位值制的思想起源很早，但缺乏适当的零号．马雅人创设零的记号，已在公元前后．印度人正式使用现在的0号是在公元876年以后．这一项重要的发明，在算筹记数法中却轻而易举地得到，这不能不使我们敬佩祖国数学家的睿智！

古书缺字都用□来表示，数字间的空位，自然也可以用□来表示．在书写的时候，字体常写成行书，而方块也就容易划成圆圈了．以〇作零号，最早在金《大明历》（1180）中看到．如403写作“四百〇三”[1]．到秦九韶的《数书九章》（1247）就大量使用〇号．如3076800记作𝍢〇𝍦𝍮𝍧〇〇．

有人以为〇号是从印度传来的[2]，这是没有根据的．我国零号的演变过程是很清楚的，而且写法和阿拉伯数码的扁圆0也不同．

“零”这个字，原来并不表示空无所有的〇．《说文解

---

〔1〕严敦杰《宋元算学丛考》，载《科学》（1947）4月号pp．109—114．严敦杰《中国古代数学的成就》（1956）．

〔2〕如 Yoshio Mikami（三上义夫），The Development of Mathematics in China and Japan（1913）p.73．

字》解释作："余雨也，从雨令声。"就是雨后的小水滴。后来引申作"零头"解。"零丁"、"零星"、"零碎"都是这个意思。105读作"一百零五"，原来是指一百之外还有一个零头五。后来〇也就读作零了。[1]

第三节　九九乘法歌诀

算筹后来发展成为珠算，直到今天还盛行不衰。古代西方也出现过某种算盘[2]，但除了少数的国家之外，都被淘汰了。为什么中国算盘有那么强大的生命力呢？这和中国广泛地使用了口诀有关。汉语一字一音，极便于编成简明容易背诵的口诀。有了一套口诀，算盘才能发挥它的巨大作用。利用口诀来加速计算，也是中国数学的一大特色。

最流行的口诀莫如"九九"（俗称"小九九"），就是乘法口诀或乘法表。现在口诀是从"一一如一"起到"九九八十一"止。古代是倒过来的，从"九九八十一"起到"二二如四"止[3]。因开头两个字是"九九"，故乘法口诀简称"九九"。

"九九"的起源很早。韩婴（汉代燕人）《韩诗外传》记载这样一段故事：

齐桓公[4]设庭燎[5]以待士，期年而士不至。于是东野有以

---

〔1〕李约瑟《中国科学技术史》译本第三卷 p.35.

〔2〕本书第十八章第一节. p. 444.

〔3〕大约到13、14世纪，才倒过来和现在一样. 见李俨、杜石然《中国古代数学简史》（上）（1963）p. 19.

〔4〕齐桓公（公元前?—643年）是春秋时齐国国君（公元前685—643年在位），是春秋五霸的第一个霸主。

〔5〕庭燎是火炬或大烛.

九九见者。桓公戏之曰：九九足以见乎？鄙人曰：九九薄能耳，而君犹礼之，况贤于九九者乎？桓公曰：善。乃因礼之。期月，四方之士相导而至矣。[1]

大意是：齐桓公在大厅中设置火炬，招致有才能的贤士。整年没有人来。于是东野地方有人用"九九"来晋见，以表示自己有才能。桓公调笑他说："九九"也算是一技之长，拿来见我吗？那个老百姓说："九九"确实不算什么才学，但您也能以礼相待，还怕比我高明的人不来吗？桓公接受他的意见而款待他。果然，一个月之后，四面八方的贤士就接踵而来了。

这个故事说明在公元前7世纪，懂得九九歌诀已不是什么希罕的事情了。九九歌诀的一些句子，在诸子百家的文献中也多次出现。如在《荀子》、《管子》、《淮南子》、《战国策》等书中不难找到"三九二十七"、"六八四十八"、"四八三十二"、"六六三十六"等句子。

1908年在甘肃敦煌发现的木简（公元2、3世纪，东汉或晋），以及1930年在甘肃北部额济纳旗居延烽火台遗址发掘出来的木简（公元前101年到公元40年）[2]上，都载有九九表。这些都是实物证据。

第四节 规矩和尺规作图

规就是圆规，它的起源很早。甲骨文已有规这个字，象手执规画圆的样子。矩由长短两尺合成，相交成直角。尺上有刻

〔1〕好几种书记载这个故事，内容相同，而文句稍有出入。参见李俨《中国古代数学史料》(1963)p.12.

〔2〕陈直《六十年来我国发现竹木简概述》，载《历史教学》(1962) 9期 p.4.

度，短尺叫勾，长尺叫股．有时为了坚固起见，在两者之间还连上一条杆（图5）．

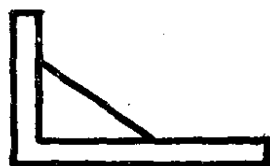


图　5

这就是在山东嘉祥县汉武梁祠石室造像（公元129—147年之间）“伏羲氏手执矩，女娲氏手执规”图中见到“矩”的形状[1]．

矩的使用，是我国古代数学的特长．它不但可以用来画直线，作直角，而且可以测量，有时还可以代替圆规，堪称万能工具．甲骨文也有矩字，可见起源很早，甚至可以推到传说中的大禹治水（约公元前2000年）以前．

《史记》卷二《夏本纪》记载禹治水时“左准绳，右规矩．”《周髀算经》[2]里有“故禹之所以治天下者，此数之所生也．”赵爽注：“禹治洪水，……望山川之形，定高下之势，……乃勾股之所由生也．”意思是说禹治洪水，必定要先测量地势的高低，因此要用到勾股的道理．《周髀》的记载虽然不一定可靠，但矩起源于极远的古代，应该没有问题．

诸子百家的著作有很多关于规矩的论述．如《墨子》卷七《天文志》上第二十六：“轮匠（造车的工匠）执其规矩，以度天下之方圆．”《孟子》卷四《离娄》上：“离娄（传说目力非常锐利的人）之明，公输子（春秋时建筑工匠，又叫鲁班）之巧，不以规矩，不能成方圆．”其他各书中类似的话，不胜

〔1〕李俨《中国算学史》(1955) p. 3．又山东历城孝里铺孝堂山郭氏墓石祠，是我国现在保存在地面上最早的房屋建筑，其年代在东汉初（1世纪）．在东西壁分别刻有伏羲手执矩，女娲手执规的像．见罗哲文《孝堂山郭氏墓石祠》，载《文物》(1961) 4、5期 p. 48．

〔2〕见本书第十三章．p.317．

枚举．可见最迟在春秋战国时代，规矩已被广泛使用了．

和西方对比，古希腊人研究几何问题，限制作图工具只能用直尺和圆规．所谓直尺就是没有刻度的只能画直线的尺．这只是理论上的限制，并不排除在某些场合下使用其他工具．

希腊人为什么强调作图只能用尺规呢？可能有下列的原因：

1．和柏拉图的哲学思想有关．他非常重视数学，但只看到数学在训练智力方面的作用，而完全忽视其实用价值[1]．既然要通过几何的学习达到训练逻辑思维的目的，作图工具就不能不有所限制．正象体育竞赛要有种种器械的限制一样．

2．欧几里得几何的基本精神是要从最少的基本假定（定义、公理、公设）出发，推导出尽可能多的命题．所以作图工具也相应地作了少到不能再少的要求．

3．欧几里得平面几何的研究对象只限于直线与圆，有了这两种工具，图形已能作出，无需再增加别的工具．因此就规定作图只限于这两种工具．

最先明确地提出作图只能使用直尺圆规的大概是恩诺皮德斯（Oenopides，*Οἰνοπίδης*，约公元前465年）[2]，以后经过柏拉图的大力提倡[3]，欧几里得又把它总结在《几何原本》之中，于是成为希腊几何学的金科玉律．

---

〔1〕柏拉图在他的《理想国》（(Republic)，吴献书译（1929）第七章，pp. 20—25）中通过苏格拉底（Socrates，公元前470?—399年）的谈话明确地阐述了这一观点．

〔2〕生于开俄斯（Chios，爱琴海中的岛）．Thomas Heath（1861—1940），A History of Greek Mathematics, vol. Ⅰ（1921）pp. 175—176．

〔3〕Vera Sanford, A Short History of Mathematics（1930）p. 9．

由于尺规的限制，产生于种种难题。最有名的是所谓三大问题：[1] 1．三等分任意角； 2．倍立方； 3．化圆为方。

在整个数学史中，很难找出象这三个问题那样具有经久不息的魅力。二千多年来，无数的聪明才智曾倾注在这几个问题之中而得不到丝毫结果。实际上这三个问题都是不可能用尺规经有限次的作图步骤来解决的。1637年笛卡儿创建解析几何，尺规作图的可能性才有了准则。1837年凡齐尔（Pierre Laurent Wantzel, 1814—1848）给出前两个问题不可能性的证明。1882年林德曼（Ferdinand Lindemann, 1852—1939）证明π的超越性，化圆为方问题的不可能性也得以确立[2]．最后克莱茵在1895年总结了过去的研究，给出三大问题不可能用尺规来作图的简单而明晰的证法，彻底解决了两千多年的悬案[3]．

虽然如此，但盲目地摈弃一切严格证明，想独步古今中外，压倒前人所有工作的"三分角家"在今天仍然不断涌现。[4] 实际上他们完全不了解所设的条件和问题之所以不可解的道理。[5]

---

〔1〕本书第五章第二节（三）p. 102.

〔2〕Eric Temple Bell, The Development of Mathematics (1945) pp. 77—78.

〔3〕F.Klein, Vorträge über ausgewählte fragen der Elementargeometrie, (1895). 英译本 Famous Problems of Elementary Geometry (1930). 汉译本，余介石译《几何三大问题》(1933).

〔4〕余宁生《我国之三分角家及方圆家》，载余介石等译《近代数学概观》(R. Courant, H. Robbins, What is Mathematics) 第二册，(1951) pp. 51—65. 又华罗庚《给青年数学家》，(1956)，《三分角问题》.

〔5〕世界上每一个重要的科学机关，都有接过数以千百计的三大问题"解答者"来信的经验．1775年，巴黎科学院认为有必要摆脱这种无休止的麻烦，通过一项决议：不再审查关于"三分角"、"倍立方"、"化圆为方"以及"永动机"的论文．见 E. W. Hobson, Squaring the Circle, A History of the Problem(1913) p. 3.

作图非用尺规不可，这只是古希腊遗留下来的习惯．我国古代几何作图就没有这个限制，采用了规矩这两种工具．矩和直尺比较，多了一个直角，还带有刻度．所能解决的作图问题要多得多．

三大问题如果不限于尺规，解决是轻而易举的．三等分任意角，恐怕再没有比阿基米德所创设的方法更简单的了[1]．这只要在直尺上添加一点就行了（图6）．在尺上记一点P，命尺端为O．设所要三等分的角是$\angle ACB$，以C为心，OP为半径作半圆交角边于A，B；使O点在CA的延长线上移动，P点在圆周上移动，当尺通过B时，联OPB．由于 $OP=PC=CB$，易知$\angle COB=\frac{1}{3}\angle ACB$．矩的特点是有刻度，因此用矩三等分任意角是易如反掌的．

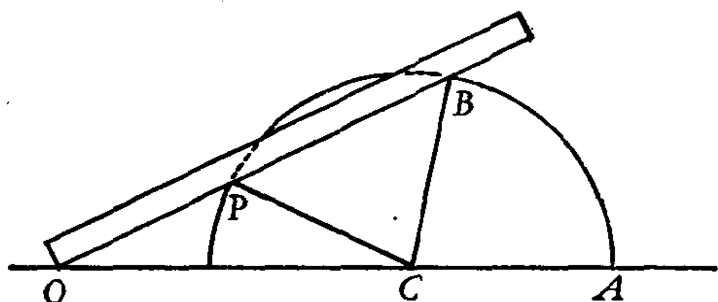


图 6

倍立方问题希腊人也早已解决．毕达哥拉斯学派的希波克拉提斯（Hippocrates，约公元前460年）首先指出它可以归结为求线段a与$2a$之间的两个等比中项．设x，y是这两个中项，$a:x=x:y=y:2a$，则$x^2=ay$，$y^2=2ax$ 于是 $x^4=a^2y^2=2a^3x$ 或 $x^3=2a^3$．如果a是已知立方体的边，那么x就是所

[1] Karl Fink, Geschichte der Elementarmathematik, W. W. Beman, D.E. Smith 英译本 A Brief History of Mathematics (1913) p. 208. T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I (1921) pp. 240—241,

求立方体的边[1]. 后来有人用两个矩（直角尺）来作出a与$2a$的两个等比中项(图7).先作$MB\perp AN$, 取$OB=a$, $AO=2a$. 将两个矩AMN和MNB这样放置，使得角顶M、N分别落在这两根垂线上．而且两者的MN边重合，另外两边还分别通过A、B二点. 易知$x=ON$, $y=OM$就是所求的两个等比中项. 如果利用矩上的刻度，一个矩就足以解决这一问题.

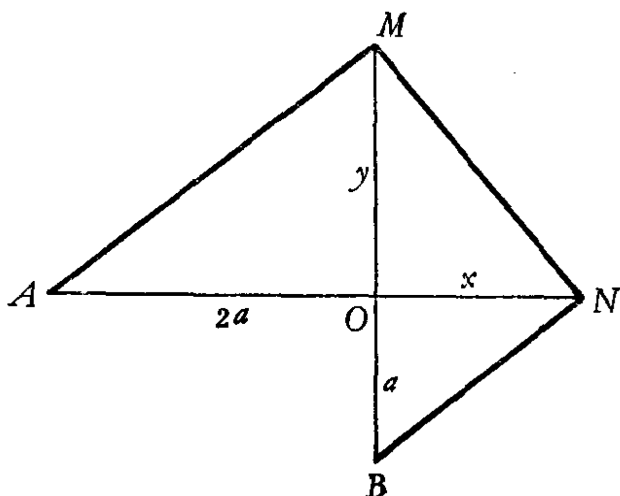


图 7

至于化圆为方，由于π的超越性，看起来好象很难，其实也很容易．欧洲文艺复兴时代的大师达芬奇(Leonardo da Vinci, 1452—1519) 曾创设用圆柱来解决化圆为方问题的巧妙方法. 取一圆柱，使底和已知圆相等，高是半径之半. 将这圆柱在平面上滚动一周，产生一个矩形，矩形的面积等于$2\pi r\cdot\dfrac{r}{2}=\pi r^2$，正好是圆的面积，再将矩形改为等积的正方形[2].

由此可知，所谓三大问题，如果取消作图工具的限制，便不再是什么难题.

我国古代用规矩来作图，很可能发展成为一门独立的和希腊几何不同的几何学. 但事实并不是这样. 原因有待探讨.

---

〔1〕Vera Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p.266.
〔2〕F. Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.249.

第五节　《周易》和纵横图

《周易》即《易经》是一本很古老的书，著者已不可考。相传是伏羲、文王、孔丘所作[1]。这传说不尽可靠。

"易"就是变易的意思。书中阐发运动和变化的地方很多。如《周易·系辞上》："在天成象，在地成形，变化见矣。""刚柔相推，而生变化。""变化者，进退之象也。"又《周易·系辞下》："穷则变，变则通，通则久。"这种运动变化的观点，包含着辩证法的萌芽。

《周易》是世界公认的第一本讨论排列的书。阳爻(yáo)"——"和阴爻"— —"这两种爻（爻就是卦的基本符号）合称"两仪"。每次取两个，共有四种不同的排列法，叫做"四象"：

⚌　⚍　⚎　⚏

太阳　少阴　少阳　太阴

每次取3个，共有八种不同的排列法，叫做"八卦"：

☰　☱　☲　☳　☴　☵　☶　☷

乾(qián)　兑(duì)　离　震　巽(xùn)　坎(kǎn)　艮(gèn)　坤(kūn)

〔1〕伏羲也叫宓羲、庖牺、伏戏等，是传说中的"三皇"、"五帝"之一。在神话中，他和女娲是人类的祖先。文王（即周文王，约公元前1182—1135年）是商代末期周族的首领，姓姬名昌。孔丘（公元前551—479年）。相传"伏羲制卦，文王系辞"（文王所作的卦辞或爻辞叫做系辞。"系"就是"挂"或"附"，附在卦之下，故称系辞），"孔子作十翼"（作了十篇文章以为原书的辅翼，故称十翼）。

八卦常用来代表8种不同的事物，如东、东南、南、西南、西、西北、北、东北八个方位，或天、地、风、雷、水、火、山、泽八种自然物等．八个方位和八卦对应起来，常画在罗盘的周围．

如每次取6个爻，可得64种不同的排列，叫做六十四卦．

如将阳爻看作数码1，阴爻看作数码0，前面列出的八卦，从右至左（坤、艮、坎、…），自下而上，可以改写成000，001，010，011，100，101，110，111．这正是二进制记数法的 0,1,2,3,4,5,6,7．而64卦相当于二进制记数法的0到63这64个数．

如果将阳爻看作表示 + 的符号，阴爻是表示 − 的符号．每一卦的三个爻分别看作 x，y，z，这八个卦就是 $+x+y+z$，$-x+y+z$，…，$-x-y-z$．正好代表立体解析几何中笛卡儿空间坐标的八个"卦限"（octant）[1]．事实上，"卦限"的卦字就是从八卦借用来的．

《周易·系辞上》："易有大极[2]，是生两仪，两仪生四象，四象生八卦．"这段话包含等比数列：1,2,4,8．如果推演下去，很可能得出某些数学理论．但下面却接着说："八卦定吉凶，吉凶生大业．"将这些数字神秘化，与科学背道而驰．而"易数"就成为占卜算卦的依据了．

卦是由长短画组成的．它也可以看作一种算筹，用以进行某种计算．算筹或者就是由此演变而来的．[3]

《周易·系辞上》又有："河出图，洛出书，圣人则（效

〔1〕陈文涛《先秦自然学概论》(1930)p. 20.

〔2〕一作"太极".

〔3〕三上义夫《中国算学之特色》，林科棠译，(1929) p. 52.

法）之”的话，但没有说明“河图、洛书”是什么东西．后人牵强附会地加以解释，编造种种神话，把“河图、洛书”说成玄之又玄的神物．说是河里跳出一匹“龙马”，背着一幅图，这叫“河出图”，又洛水爬出一只龟，也背着书，这叫“洛出书”．

到了宋代，有人将“河图、洛书”和“九宫”联系起来．“九宫”是一种“纵横图”，西方人叫做幻方（magic square）[1]．

《大戴礼记》[2]《明堂》有：“二，九，四，七，五，三，六，一，八”的记载．徐岳《数术记遗》[3]中有“九宫算”．北周（6世纪）甄鸾注：“九宫者，即二、四为肩，六、八为足，左三、右七，戴九履一，五居其中．”指的是图8这样一个图．它的巧妙之处，是各行各列及对角线上的三个数之和都是15．

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 8

宋刘牧（1011—1064）《易数钩隐》说“河图”就是这个“九宫”，而“洛书”是另一种十个数的排列，叫做“天地生成数图”．后来朱熹（1130—1200）的书又把“河图、洛书”颠倒过来，说“洛书”是“九宫”，“河图”是“天地生成数图”．[4]

朱熹是宋代的唯心主义哲学家，是“程、朱理学”的代表

〔1〕李俨《中算家的纵横图研究》，载《中算史论丛》（一）（1953）．

〔2〕先秦古书．

〔3〕见本书第十五章第四节，p.386．

〔4〕钱宝琮《宋元数学史论文集》（1966）p. 230．

人物．他故弄玄虚，把数学引入歧途．这类神话一直流传到18世纪初，对数学发展起着消极的作用．

几百年来，一些重要的数学著作，都宣扬数起源于“河图、洛书”的谬论．[1] 如秦九韶《数书九章》（1247）的序中说：“爰自河图洛书，闿发秘奥（自从河图洛书出来之后，才揭发了数学的秘奥）．八卦、九畴[2]，错综精微．”莫若(1303)在《四元玉鉴》的序中也说：“河洛图书泄其秘．”

到明代程大位《算法统宗》（1592），卷首还画了一幅“龙马负图”的画．一只动物，头象龙，身如麒麟，口中喷出一部书来．并有说明：“数何肇？其肇自图书乎（数起源于河图洛书）？伏羲得之以画卦，大禹得之以序畴，列圣得之以开物．”

清代《数理精蕴》（1723）上编卷一：“粤稽上古，河出图，洛出书，八卦是生，九畴是序．数学亦于是乎肇焉．”都是同一个腔调．

直到梅瑴成晚年，校勘《算法统宗》，出版《增删算法统宗》（1760，乾隆25年），才删去河图、洛书之类的神话，并说：“毋庸效尤（尤：错误．不必效法这些错误的东西），故去之．”大胆地打破过去的迷信．

伊拉克的柯拉（Tabit ibn Korra，836—901）是中国以外最早讨论纵横图的人[3]．15世纪（一说14世纪）之初，拜占庭的摩索普拉斯（Manuel Moschopoulus）将东方的纵横图介绍到欧洲去．在1514年德国著名画家丢勒（Albrecht Dürer,

〔1〕李迪《彻底批判关于数学起源于“河图洛书”的谬论》，载《数学的实践与认识》(1975) 2期 pp. 11—14．

〔2〕相传禹治水时天赐给他的九种治理天下的大法．

〔3〕F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p.104.

1471—1528）的一幅版画上看到欧洲完整的纵横图。

我国宋代，从杨辉《续古摘奇算法》（1275）一书开始，重新激起研究纵横图的兴趣。梅瑴成1760年删去《算法统宗》的河图洛书之后曾一度沉寂，后来也还有不少人从事这项研究。

纵横图开始时纯粹是一种数学游戏，看不出有多大实用价值，在历史上（欧洲中世纪也是如此）还夹杂着迷信的糟粕。我们应该把事物本身和强加在它上面的迷信色彩分离开来。正象在继承毕达哥拉斯学派的科学成果的同时，要摈弃他的神秘主义一样。刻卜勒早期的著作把天文学和占星术掺合在一起，还加上许多主观臆断。这并不妨碍我们吸取它的科学成分。无数的历史事实告诉我们，数学的创造发明往往不能立刻看到它的实际应用。"黄金分割"在古希腊时代是作为一种美来欣赏的，当时不可能想到两千多年之后会在优选法上大显身手。

近代已经发现，纵横图和组合分析有某种关系[1]。电子计算机技术的迅速发展，给这个古老的题材注入了新鲜血液。目前，它在程序设计、图论、人工智能、对策论、组合分析等方面都有广泛的应用。[2]

排列组合的研究，外国很晚才出现。在古希腊的著作中很

〔1〕P. A. MacMahon, Combinatory Analysis (1915—1916)，指出这一点。见 F.Cajori, A History of Mathematics (1919) pp. 366—367.

〔2〕谈祥柏《纵横图漫谈》，《纵横图续谈》；载《科学普及》(1977.9) pp. 36—37，(1977.11) pp. 36—37. 纵横图的论述见 W.S.Andrews, Magic Squares and Cubes (1960).

少看到．罗马时代的布依西亚斯曾讨论过 n 个物体每次取两个的组合数．

印度的婆什迦罗的名著《丽罗娃提》[1] 中有一个有趣的排列问题："湿婆神（Sambu或 Siva）[2] 的十只手拿着十件东西：绳子、钩子、蛇、鼓、头盖骨、三叉戟、床架、匕首、箭、弓．如果将这些东西交换，共有多少种不同的方式？正象哈利神（Hari）四只手交换拿着的狼牙棒、铁饼、莲和贝壳一样．"

在印度，哈利神的四只手的四样东西的排列不同，这个神就有不同的名字．按照这个规矩，湿婆神手中的东西不同，也应该给予不同的名字．婆什迦罗也许想使他的读者对这个庞大的数目（$10! = 3,628,800$）大吃一惊[3]！

中世纪犹太的占星者为了研究行星的会合（conjunction），对排列组合发生了兴趣．埃斯拉（Rabbi ben Ezra，约 1140 年）曾写过这方面的文章．

排列组合和概率论有密切关系，17世纪随着概率论的兴起获得了迅速的发展．

第六节　《墨经》的几何学

墨子（墨翟，约公元前478—392年）[4]，鲁国人，是墨家

---

〔1〕见本书第六章第二节（三）．p.141．

〔2〕婆罗门教、印度教的主神之一．是毁灭之神，苦行之神．

〔3〕Vera Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p.198.

〔4〕墨子的生卒年月未能确定．有多种说法，如（公元前468—376年），（公元前480—390年），（公元前479—381年）等，前后有十多年的出入．迟于孔子早于孟子是多数学者的意见．

的创始者。

《墨经》虽不一定是墨子本人所著，但至少其中主要的发现及言论应归功于墨子。《墨经》是现存《墨子》53篇（原有71篇）的一部分，包括《经上》、《经下》、《经说上》、《经说下》这四篇。

春秋（公元前770—476年）、战国（公元前475—221年）是我国由奴隶社会向封建社会大转变的时期。人们普遍使用铁器，农业技术迅速提高，手工业也随着发展起来，逐步走向专业化。水利、冶炼等科学技术生气勃勃，货币经济也开始抬头。随着社会的剧烈变动，在学术上反映出诸子蜂起、百家争鸣的局面。在诸子著作中，论及自然科学的，以《墨经》最有系统。它包含几何学、力学、光学、逻辑学等方面的论述，是上古期流传到现在最出色的科学书籍。

西方最古老的系统几何学首推欧几里得《几何原本》，在中国则是《墨经》。[1]这书文字简略，且年代久远，错简[2]、脱字、误字的地方很多，增加了理解的困难。后代学者花了很大的力气来校释，但见仁见智，说法颇有出入，因此还有进一步发掘探讨的必要。

《墨经》虽没有《几何原本》那么完善、丰富和组织严密，但几何学部分的若干理论，其定义的确切，立论的精辟，实不下于《几何原本》。

---

〔1〕《墨经》之名首见于《庄子·天下篇》："南方之墨者，苦获、已齿、邓陵子之属，俱诵《墨经》。"根据各家的考证，认为是后期墨家的著作，成书的年代约当战国后期（公元前4世纪或3世纪），略早于《几何原本》。

〔2〕古代著作刻在竹简上，串而成册。日子久了，绳子腐烂，常有前后倒置的情形。

下面举几个例来看看《墨经》的几何学[1]．《经上》、《经下》每条阐明一个定义、原则或定理，《经说上》、《经说下》是解释这些定义、定理的文字．

《经上》：“平，同高也．”

译成现代的语言是：所谓平行线（或平行平面）是两条（个）在每一处距离都相同的直线（或平面）．

《经上》：“中，同长也．”

线段上的一点到两端等距，这一点叫做中心．或中心是这样一个点，它和图形边缘上每一点都等距；对圆来说是圆心，对球来说是球心．

《经上》：“圜，一中，同长也．”

圜（yuán或huán）是圆或球．圆(球)有且只有一个中心．它和圆周（球面）上每一点的距离都相同．

《经上》：“端，体之无厚而最前者也．”[2]

端是几何的点，是物体的尖端，它位于物体的最前面而没有厚薄和大小．这和《几何原本》中“点是没有部分的”、“线

---

〔1〕参考（1）陈文涛《先秦自然学概论》(1930) p.21.
（2）谭戒甫《墨辩发微》(1958).
（3）钱临照《墨经上关于形学力学和光学的知识》，载《科学通报》2卷8期.
（4）钱临照《我国先秦时代的科学著作——墨经》，载《科学大众》(1954.12).
（5）清黄钟骏《畴人传四编》(1898) pp.6—9.
（6）曾昭安《世界最古的几何学》，载《数学通讯》(1954.1).
（7）栾调甫《墨子研究论文集》(1957).
（8）华绳武《墨子的几何学知识》，载《数学教学》(1957.8).

〔2〕原文是“体之无序而最前者也”．据清王引之，“序”与“厚”隶书相似而误，应改为厚．

段的两端是点”的说法相同.[1]

《经上》:“体，分于兼也.”《经说上》:“体，若二之一，尺之端也.”

体是形体，可以作图形讲. 分是部分，兼是全体. 第一句话是说：图形是由部分组成的. 二之一是将图形平分，尺是线段. 古人常用一种具体的事物来代表抽象的概念，如正方形叫做方田，圆锥叫做聚粟等. 端是点. 第二句的解释是：将一个图形例如线段，一半一半地分下去，最后将得到一个点.

如果这解释是墨子原意的话，那么使我们异常惊奇的是这里面竟含有“点是线段无限分割的极限”的思想萌芽，或者近代数学中区间套原理的雏形.

《经上》:“穷，或有前，不容尺也.”《经说上》:“穷，或不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也.”

“或”是古代的域字. 《说文解字》戈部或字：“邦也，从口从戈以守一；一，地也.”戈是武器，口是人，一是土地. “或”是以戈守土，后来加土字边成域，意义一样. 加上边界成國，也是邦的意思. 这里“或”作区域讲. “前”是前方尽头的意思，有前作有界讲. 第一句话的解释是：穷就是有边界的区域，如果沿着某一方向用尺（另一线段）去量这区域，一定能够量尽. 第二句话是：穷，是能够量尽的区域，也叫有穷. 如果永远量不尽（莫不容尺），必定是无穷的.

---

[1] 根据 Thomas L. Heath, The Thirteen Books of Euclid's Elements, vol. I, (1925) p.153. 利玛窦、徐光启合译的《几何原本》(1607)译作“点者，无分”，“凡线之界是点”. 又《数理精蕴》(1723)作：“点，无长阔厚薄，其间不能容分，……，线之两端即点.”

这和阿基米德公理[1]的意义相同。[2]

《经下》：“一少于二而多于五．说在建位．”

《经说下》：“一，五有一焉，一有五焉．十，二焉．”

一少于二是很明白的．多于五不好解释．孙诒让[3]认为“建”字不通，恐怕是“进”字之误．这样，一进位成十，自然多于五了．三上义夫[4]以为建不必改为进字，也可以解释得通．建作建树或竖立解．古代筹算个位的一是横式，竖立起来变成十位的一，这句话就很清楚了．三上义夫的解释很巧妙，不过有一个漏洞．筹算的个位不是用横式而是用纵式，十位用横式．这从《孙子算经》的“一纵十横，百立千僵”[5]的话看出．说个位用横式，似乎没有根据．

其实不从筹算制着眼，而是从古代的文字着眼，便可以一语道破．甲骨文的一字是横写的一，十字是一竖❙．金文十字作♦，猜想是两掌合起来的形状[6]．甲骨文为了刻写的方便，不作粗笔．如15写成㐅|，而50是㐅̍．（㐅是5）[7]“建”作竖立解，“一”竖起来成“|”（10）当然就大于五了．

第二句是说明“一”的：五包含一，一（竖起来的一）又包含五，即包含两个五．这种解释似乎比前两种更合理．

---

〔1〕见本书第五章第二节（六）p.108．

〔2〕我国有的教科书主张把阿基米德公理改称为“或不容尺公理”．现未有定论．

〔3〕孙诒让《墨子闲诂》：“诒让按：说无建义，疑作进，即算位之二五进一十也．”

〔4〕三上义夫《中国算学之特色》，林科棠译，（1929）p.50．

〔5〕原文是“一从十横”，从通纵，僵是仆倒之意．

〔6〕佛教称为“合十”，这也许是偶合。

〔7〕郭沫若《甲骨文字研究》（1962）pp．111—130，《释五十》．又考古研究所《甲骨文编》（1965）（这是殷虚甲骨刻辞的字典）pp．94，540，608．

《经说上》："小故，有之不必然，无之必不然．体也，若有端．大故，有之必然，若见之成见也．"

这里"小故"相当于必要条件，"大故"相当于充分条件．可译成[1]：小故是一种条件，有了这种条件不一定有这样的结果，但若没有这条件就一定没有这样的结果．例如有点不一定就成直线，没有点，就一定不成直线．大故是一种条件，有了这种条件就一定有这样的结果．例如，有了看的动作，就能看见东西，看是看见的大故．

第七节　《庄子》的极限思想

稍后于墨子的庄子[2]，也是我国有名的哲学家．他有一个朋友惠施（约公元前370—310年），经常和他辩论．《庄子》一书记述他们辩论的地方很多．《庄子》原有52篇，现存33篇．是庄子本人或他的后学所作．第33篇是《天下篇》，在学术上有巨大的价值，其中包含很多数学的道理．最后一段记载惠施等人的学说：

"惠施多方[3]，其书五车，其道舛驳[4]，其言也不中．……至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一．……飞鸟之景[5]，未尝动也．镞矢之疾，而有不行不止之时．"

---

〔1〕参考谭戒甫《墨辩发微》(1958) p．50．张孝礼、彭毓叔《墨子与数学的必要及充分条件》，载《数学教学》(1956) 1期，pp．29—32．

〔2〕姓庄名周，蒙县（今河南商丘县东北）人．约公元前355—275年，另一说是公元前369—286年．

〔3〕方：方术．

〔4〕舛音 chuǎn，错误；驳：杂乱．

〔5〕景同影．

“大一”相当于我们的无穷大．“小一”相当于无穷小．“外”是外界或边界．“至大无外，谓之大一．”可译作：至大是没有边界的，这叫做无穷大．“至小无内，谓之小一，”译作：至小是没有内部的，这叫做无穷小．这和《秋水》篇：“至精（精细）无形，至大不可围（包围）”的意义相同．不难看出，立论者对无穷有一定的认识．

“飞鸟之影，未尝动也”和希腊爱利亚学派的齐诺的“飞箭静止说[1]”如出一辙．“镞矢之疾，而有不行不止之时”的立论更为精辟．可解释如下：

如果一个物体在一瞬间占有两个不同的位置，这个物体一定在运动着．如果在一段时间内占有同一位置，这个物体就是静止的．现在把时间分得这样细，使得每一瞬间飞箭只占一个位置（如果占有两个位置，可将时间再分为两半）．这时既不能说它是静止的，又不能说它在运动着．

最脍炙人口的是：

“一尺之捶，日取其半，万世不竭．”

“捶”同“棰”，就是一根杖或棍子．万世、万古都是永远的意思．竭是尽．意思是：一尺长的棍子，第一天取去一半，第二天取去剩下来的一半，以后每天都取去剩下的一半，这样永远也取不尽．这个著名的论断，现在讲数列极限时仍常常被引用．

〔1〕见本书第五章第二节（四）p.104．

14

第二编　各科发展概况

第四章 算　术

第一节 引　言

“算术”一词，拉丁文arithmetica，来自希腊文 ἀριθμη-τική，由ἀριθμεῖν（数shǔ），ἀριθμός（数shù）和 τεχνή（技术）变来．原来的意义是“数(shù)和数数（shǔ shù）的技术（或学问）．”现在算术仍然是研究自然数、分数、小数的加、减、乘、除及乘方、开方运算的科目[1]．

我国古代，算术指的是数学的全体，而几何、代数、三角等等都是后来才有的名称．1607年利玛窦、徐光启合译欧几里得《几何原本》，几何才成为数学的一个分支的名称．1859年李善兰、伟烈亚力合译棣么甘的“Elements of Algebra”，定名为《代数学》，代数之名由此而来．清初薛凤祚编成《历学会通》（1664），其中包括《三角算法》（1653），三角的名称逐渐为大家所使用．1859年，李善兰、伟烈亚力合译罗密士《代微积拾级》，第一次使用微积分这个名称．而“代”是代数几何或代形合参（即解析几何）的简称．

[1] 有的书把数论也包括在算术之中，还有的书把数系的内容冠以算术的标题．

算术这个词，至少在汉代已经通行。例如《前汉书·律历志》论记数筹算有："其法在算术，宣于天下。"《后汉书》卷一百十二下单扬传："以孤持清苦自立，善明天官算术。"[1]

正式使用这一术语的是《九章算术》，[2]它包含平面几何、立体几何、算术、代数等方面的知识。在它之前，已有《许商算术》、《杜宗算术》等书，是公元前一世纪的作品，可惜已失传。[3]这些书大概是《九章算术》的前身。

后来算术这名称被算学或数学所代替，而算术作为数学的一个分支的名称保留了下来。

第二节 古人对数的认识

完全没有数的概念的思维是不可想象的。儿童牙牙学语和数一个、两个、三个很难分出先后，可以说明这一点。数的概念的形成，远在文字出现之前，这是可以肯定的。事实上，文字出现之前，人们早已利用别的方法（例如结绳）来记数和记事。《周易·系辞》说："上古结绳而治，后世圣人，易之以书契（在骨或竹、木、石上刻文字）。"这一说法是可信的。结绳记事的方法，并不限于中国，许多古代民族如日本、非洲、澳洲、南美洲等地区都使用过[4]。有的博物馆还藏有从墓中挖出的古代结绳的遗物，可以证明人类确实有过结绳的时代。如美国纽约博物馆藏有古代秘鲁用有颜色绳子编的叫做基普

〔1〕李俨《中国古代数学史料》（1963）p.22,《算术》。

〔2〕见本书第十四章。p.338。

〔3〕钱宝琮《中国数学史》（1963）p.29。

〔4〕李俨《中算史论丛》第五集（1955）pp.4—5。

(quipu) 的东西，它是用来记数和记事的。[1]（图 9）后来“易之以书契”，用刻画符号来代替结绳，于是产生了文字。

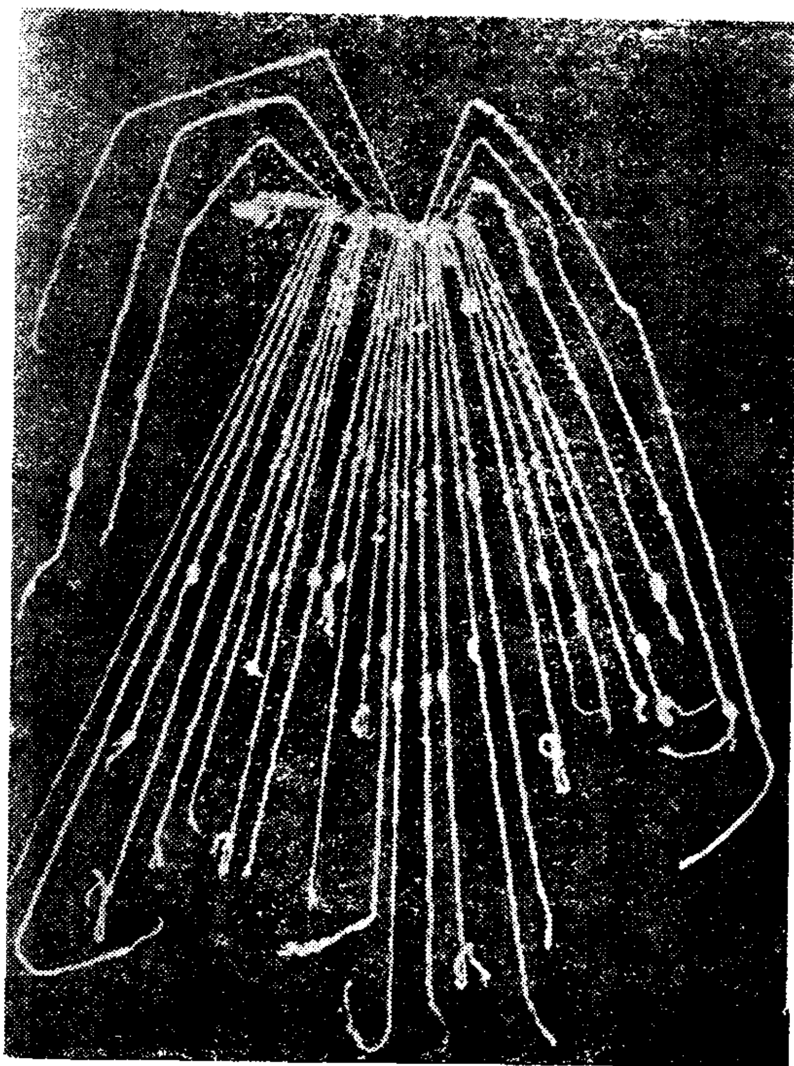


图 9 结绳记事实物图

数的概念虽然很早就已发生，但和语言文字一样，它的发展也经过了一个漫长的历程，其进展是相当迟缓的。

---

〔1〕 М.О. Косвен《原始文化史纲》（Очерки истории первобытной культуры）张锡彤译，(1955) p.199.
F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1928) p.38.

一直到现代，还有一些不发达地区的民族的语言，只有头几个自然数的名称．如澳大利亚和波利尼西亚　(Polynesia)　群岛[1]，托列斯海峡（Torres Strait）群岛[2]等，只有 1 和 2 的名称[3]．3 叫做 2-1，4 叫 2-2，5 叫2-2-1，6 叫2-2-2，6 以上的数就说成许多或无数．

看看头几个数的写法，便可推想 4 以后的数字出现要晚得多．汉字一二三四五，殷甲骨文作 一 二 三 亖 X，周秦金文[4]作 一 二 三 亖 亖（或X），许慎《说文解字》作

一 二 三 四 X

头三个字古今没有变化，它是算筹或手指的象形．四开始有变化，有

亖 四 四 四 四

等写法[5]．后面几个是口里呼气读“四”的样子．

埃及，腓尼基(Phoenicia)[6]，阿提喀(Attica)[7]，等古老

---

〔1〕南太平洋岛屿，法国殖民地，包括土阿莫土　(Tuamotu)　群岛，社会(Society)群岛等．

〔2〕在澳洲与新几内亚之间．

〔3〕И.Г. Башмакова, А.Л. Юшкевич《记数制度溯源》，载《初等数学全书》第一分册《算术》，刘绍祖译，(1959) p.8．

〔4〕镌刻在金属钟鼎器皿上的文字，也叫钟鼎文．

〔5〕郭沫若《甲骨文字研究》(1962) p.112．

〔6〕在今叙利亚西部和黎巴嫩靠地中海的古国，约公元前3500年．

〔7〕希腊东部地区，公元前6世纪．

的象形文字，头三个自然数都写成 Ⅰ Ⅱ Ⅲ. 腓尼基人发明的拼音字母和数码的写法可能是通过伊特拉斯坎（Etruscan）[1] 人带给罗马人的. 罗马数字头三个也写成 Ⅰ Ⅱ Ⅲ. 和中国数字的区别仅仅在于横写和竖写. 但我国的筹码数字横写和竖写都可以，竖写就和这些古国的数字一样.

不同地区和民族头三个数字大多保持象形文字的写法，加上现代还有一些发展中地区只有前几个数的名称，可以猜想人类有一个很长的时期停留在只知道前两三个自然数的阶段上.

进一步认识更大的自然数，人们已经有了各种不同的表示方法. 汉字的四由口呼气的形象变来，五在《说文解字》中写作X，许慎解释说："五行也，从二，阴阳在天地间交午也."将五和五行联系起来，二表示天地，交午就是纵横交错的意思.

5 罗马数字写成Ⅴ，是一只手四指合并，大拇指张开的形状. 10写成X，就是两只手掌. 而四是Ⅳ，是5 − 1 = 4 的意思.

俄文里的 ПЯТЬ（5 的名称）和 ПЯСТЬ（掌骨）有密切关系，而 ПЯДЬ是一拃(zhǎ) 的意思，即张开大拇指和中指两端的距离. 这几个字互相间只差一个字母. 这和广东话有时将 5 说成"一巴掌"很相似. 这也说明人类最初数数是用十个手指头来帮助的.

有些地区，"七"这个数字长时间用来表示不确定的大数目[2]. 在俄罗斯的谚语中还保留这个时代的痕迹. 例如"量七

〔1〕意大利半岛早期的居民，公元前1000年左右.

〔2〕М.Я. Выгодский《初等数学手册》(Справочник по элементарной математике)，周佰涛译，(1962) p.45.

次，剪一次”，相当于中国的“三思而后行”（出自《论语·公冶长》）．“七个保姆，没有人看小孩”（相当于中国的“一个和尚挑水吃，两个和尚抬水吃，三个和尚没水吃”）．汉语的三思，也是多思的意思。

类似地，汉语的“九”也往往用来代表不确定的大数目．例如“九死一生”，指历尽艰险，死里逃生．“若九牛亡一毛”（司马迁《报任安书》）．这里“九”指多．又“善攻者动于九天之上”（《孙子·形篇》），“九天”指高不可测．

中国的帝王对“九”似乎特别有兴趣．北京的“九龙壁”、“九龙柱”、“九桃壶”等不胜枚举．也许他们想到十虽比九大，但从进位的观点看，十变成了一．同时“九”和“久”同音，“九”就是既大且久．宫殿的每一扇大红门都有九九八十一个铜钉，更象征着永久和大到无限了．

古人慑服于自然现象之错综变化，神奇莫测，于是恐怖、崇敬、希望的心情交织在一起，构成了种种宗教和迷信．在数的概念之中也常常渗入宗教的因素．几乎每一个简单的数字都可以象征某种神秘物．在中国如“三才”（天、地、人），“四灵”（麟、凤、龟、龙或苍龙、白虎、朱雀、玄武），“五行”，“六神”（道教认为人的心、肺、肝、肾、脾、胆各有神灵主宰．“六神无主”形容心慌意乱），“七夕”，“八卦”，“九泉”（阴间）等等．西方人也有“以十三为不吉利的迷信”一类的说法．

我们现在所用的记数法是十进制的，不难理解，这是因为生来有十个指头．指头不够用，有时用脚趾．因此有的民族使用20进制．有些国家虽然不用20进制，但在语言文字中常带有20进制的痕迹．例如英文20也叫做score．法文20叫做 vingt，

80叫做quatre-vingts （4个20），都保留着20这个特殊的字。

俄文的数字都是十进的，而40(copok)却是例外。这字眼在俄文里含有“许多”的意思（手、足指的两倍）。如蜈蚣俄文叫做“四十足”(сороконожка)，而英文叫“百足”（centi-Pede；cent是百，pedal是足），汉语也叫“百足”，而德文叫“千足”（Tausendfuß；Tausend是千，Fuß是足）。都是多足的意思。实际蜈蚣有42条腿。

古代的人民，不但需要数数，还要度量路途的长短，地面的广袤，容器的大小等。渐渐形成了线、长度、面积、体积等概念。这便是几何学发生的直接根源。

最初丈量的标准是利用人身体的某部分或常见的实物。古代英国的尺就是以人脚的长为准的，所以“英尺”和“脚”现在还是同一个字（foot）[1]。现在一英尺比一只脚长得多，怎样解释呢？只要考察一下中国尺的长度的演变，英尺长度的变化也就不足为奇了。

《孔子家语》：“布指知寸，布手知尺，舒肘知寻，斯不远之则也。”大拇指与中指张开，两指端的距离叫做一尺，中指一节的长叫一寸，两手伸长得八尺，叫做一寻。古代一尺，现在叫做一拃，大约是20厘米。经过考证，周代一尺的长是19.91厘米[2]，和这个数字相符。

度量衡的单位，并不是一成不变的，它随着时间不断地变化着。总的趋势是由小变大。后汉（公元25—220年）一尺长

〔1〕见Webster's International Dictionary of the English Language (1902)p.580.

〔2〕吴承洛《中国度量衡史》(1957)p.43.

23.04cm，魏晋（3、4世纪）24.12cm，隋（581—618）29.51cm，唐（618—907）31.1cm，宋、元（10—14世纪）30.72cm，清32cm，现代的市尺33.33cm. 为什么由小变大呢？原来封建统治者向老百姓征税，是收布帛、米、粟等实物的. 国家规定了一定的税率，不能随时变更. 但只要将尺稍微加大一点，就可以多收许多实物. 况且古代度量衡的器具不可能作准确的校正，因此尺就渐渐长起来，斗也渐渐大起来. 后来税收改用货币，就不必用加大单位的办法来增加税收了.

利用人身来度量，还有很多记载. 如《大晟乐书》："宋徽宗（1082—1135）皇帝指，三节为三寸." 英皇亨利第一（Henry Ⅰ，1068—1135）规定从他的鼻尖到大拇指尖端的长度作为一码.

粗略地说，数学是数量的科学. 而数是数（shǔ）出来的，有了度量，才能对量（liàng）有所认识.

第三节　印度-阿拉伯数码

如果把世界上所有不同的数码写法罗列出来，那将要写成一本几百页的大书[1]. 简单地回顾一下现在国际上通用的阿拉伯数码的变化过程，倒是很有意义的. 在数学史上，这种数码通常叫做印度-阿拉伯数码（Hindu-Arabic numerals）. 它的演变，有一段漫长复杂的历史.

最初印度人用梵文（印度古代文字）的字头表示数码，公

---

〔1〕Florian Cajori（1859—1930.8.14），A History of Mathematical Notations, vol. Ⅰ（1928）pp.45—70.

元2世纪，数码写成下面的形状（第2行指它相当于现在的数码）[1]：

2 3 4 5 6 7 8 9

各地的写法，并不完全相同。经过几百年的演变，8世纪以后变成：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

叫做“德温那格利”（Devanagari，原意是“神圣的城市字体”）数码。

零号是印度人的卓越发明，没有零号，就没有完整的位值制记数法，这种记数法能用简单的几个数码表示一切的数。世界上也有不少民族懂得零的道理，然而系统地研究、处理和介绍零，还是以印度人的功劳最大。

摩诃毗罗《计算精华》[2]一书，记载了关于零的算法：“一个数乘零得零，一个数加零、减零或除以零，这数都不变。”显然当时尚未认识以零作除数的不可能[3]。

直到婆什迦罗，对零作除数的问题仍然不十分清楚。

---

〔1〕F.Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.16.

〔2〕见本书第六章第二节（三）p.141.

〔3〕David Eugene Smith(1860—1944), History of Mathematics, vol.Ⅰ,(1923) p.162.

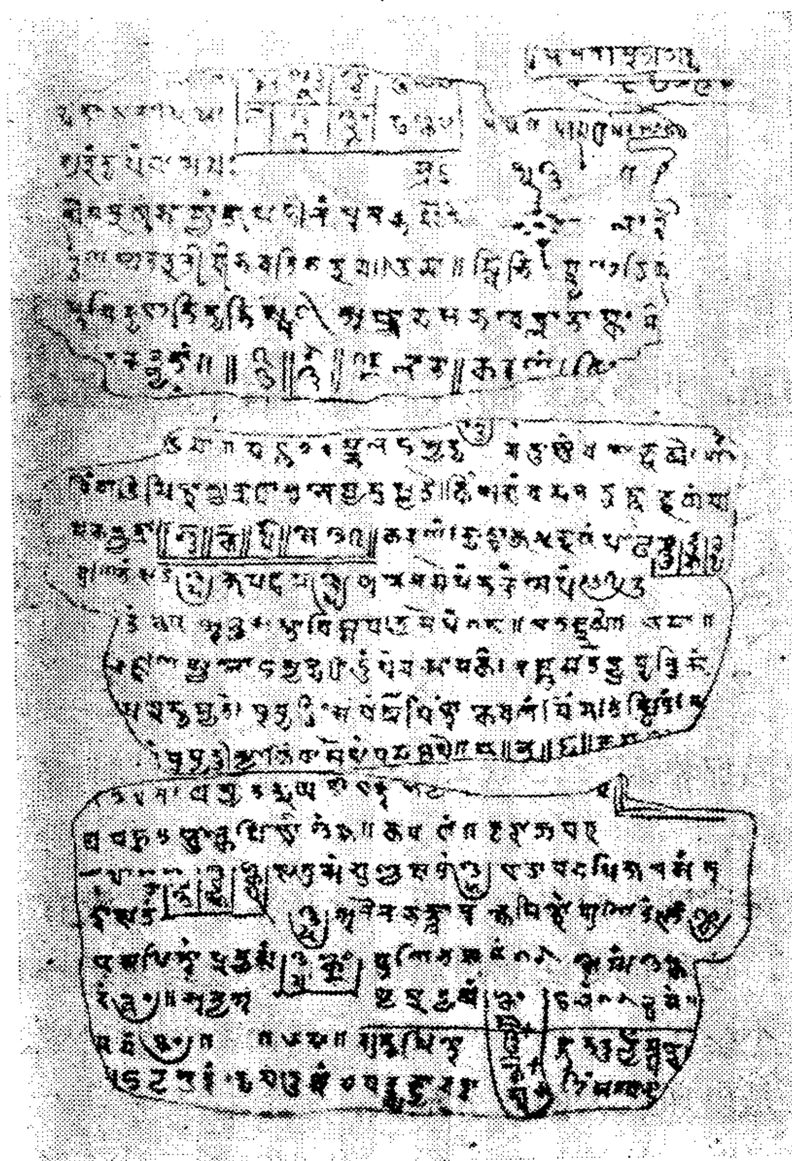


图10　巴哈沙利残简

1881年在印度西北边界的村落巴哈沙利（Bakhshālī）附近，挖得写有文字的桦树皮，边缘已脱落不齐。大概是8、9世纪时转抄3、4世纪时算术书的残页(图10)。上面记载包括分数的一些算题。值得注意的是小点“·”的记号，它的名称叫做“空”(sûnya)。这“空”有双重意义。在一个问题中，空并不是指一无所有，而是指这里的东西现在还不知道，有待发现和填补上去。这相当我们的未知量。另一方面，采用位值制

记数法，（37）表示三十七，中间空出一格（3　7）就表示三百零七，为了避免看不清楚，在中间加上小点（3·7），表示十位处一无所有，这就相当于现在的零号了。

小点什么时候改成 0，时间很难确定，但在公元 876 年，0 号确实已经出现[1]。

773 年，巴格达[2]城的印度天文学家，开始将印度的天文学及数学书籍译成阿拉伯文，印度的数码传到了中亚细亚。当时印刷术还没有发明，书籍全用手抄，字体因人因地而异，出入很大。

12世纪之初，欧洲人开始将大量阿拉伯文的数学书籍译成拉丁文。意大利的斐波那契是当时最出色的学者，他用拉丁文写成《算盘书》[3]，将印度-阿拉伯数码和记数制度介绍给欧洲人。这本书一开头就说："印度的九个数目字是 9，8，7，6，5，4，3，2，1，用这九个数字以及阿拉伯人叫做 sifr（零）的记号 0，任何数都可以表示出来。"当时这些数码和现代的写法仍然有很大的差别。

任何一种新的改革，都不是一朝一夕所能办得到的。印度-阿拉伯的优越记数制度，虽然经斐波那契和许多学者的鼓吹提倡，但仍遭到一些人的猛烈反对。例如在1299年意大利佛罗伦萨（Florence）的法令中就禁止银行使用印度-阿拉伯数码而

---

〔1〕根据D.E. Smith, L.C. Karpinski, The Hindu-Arabic Numerals(1911) p.52. F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol.Ⅰ(1928) p.48.另一种说法是870年出现在碑文上，见李约瑟《中国科学技术史》第三卷《数学》译本，(1978) p.20.

〔2〕当时是东大食国的首都.

〔3〕见本书第六章第二节（五）p.145.

强迫使用罗马数字[1]．

印度数码传入中亚细亚时，梵文的“空”(sûnya) 被译成阿拉伯文 sifr，传入欧洲变成拉丁文 zephirum，以后再变成英文的零字：cipher及zero．欧洲人只知道这些数码是从阿拉伯国家传来的，所以叫做阿拉伯数码．以后在欧洲又经过若干岁月的演变，13世纪在君士坦丁堡(现在的伊斯坦布尔，Istanbul)一个僧人普兰尼达 (Maximus Planudes，约1260—1310) 的书中，写成

1　2　3　4　5　6　7　8　9　0

1957年，陕西省文物保管委员会在西安发现几块铁板[2]，上面刻有数码，和普兰尼达的写法基本一致．这可以说明两点：一、这块铁板应该是普兰尼达时代的产物；二、印度-阿拉伯数码传入我国大致也是这个时期[3]．

14世纪，中国的印刷术已经传到欧洲．在1480年英国的卡克斯敦(William Caxton，1422?—1491)[4] 出版的印刷本书中，数码已相当接近现代的写法：

---

〔1〕Dirk. J. Struik, A Concise History of Mathematics (1954) p.105.

〔2〕严敦杰《阿拉伯数码字传到中国来的历史》，载《数学通报》1957年 10月号．

〔3〕夏鼐《考古学和科技史》(1979)pp.63—68，认为是13世纪50—70年代的产物．

〔4〕著名的出版家，他在1474年左右出版第一批印刷的书籍．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

到1522年，英国同斯托（Cuthbert Tonstall，1474—1559）的书才和现在的写法基本上一致。以后渐渐固定下来。

阿拉伯数码传入我国，最早是13、14世纪，但迟迟不被采用。1859年伟烈亚力和李善兰合译《代微积拾级》，将常数A, B, C, D译成甲，乙，丙，丁；x, y译成天，地；阿拉伯数码译成一，二，三，四，……。

1892年，狄考文（Calvin Wilson Mateer，1836—1908，美国人）和邹立文合作《笔算数学》，正式采用阿拉伯数码。但不是横写而是直写，如

2358 写成
2
3
5
8

直到本世纪初年，才慢慢改用现在的写法。

我国迟迟不采用阿拉伯数码，主要原因可能是我们自古以来使用筹算式数码记数法，也是十进位值制，和用阿拉伯数码记数法效果相同。而且汉字一、二、三、四，……笔画也很简单易写，一时看不出阿拉伯数码的显著优点[1]。欧洲中世纪用的是罗马字母非位值制记数法，冗长笨拙。和阿拉伯数码记数法相比，显得十分落后，因此容易接纳新的记数法。20世纪以后，我国数学与世界合流，自然要采用国际通用的阿拉伯数码了。

〔1〕参考钱宝琮《阿拉伯数码的历史》，载《数学通报》（1959.9）pp.2—4.

第四节 算术运算

自然数的四则运算，现在每一个小学生都能掌握，但在一千年前，却不是一件容易的事。欧洲在阿拉伯数码输入之前，使用罗马数字。这种记数法是非进位制的，一个简单的数要写成长长的一串。罗马数字用 I、V、X、L、C、D、M分别表示 1,5,10,50,100,500,1000。这样，3888就要写成

$$MMMDCCCLXXXVIII.$$

这种笨拙的记数法在12世纪以前盛行于欧洲，有的国家直到16世纪还在使用。那时，做加减法就已相当困难，会乘除法就可以称为专家了。

举一个例子来说明当时的计算方法是多么烦冗。查理曼(Charlemagne,742—814)[1]统治时期，最著名的学者是阿尔昆(Alcuin,735—804)[2]。在他的算术教科书中讲乘法时举了235×4这样一个例子。235写成 $CCXXXV$。乘上 4（Ⅳ），第一步是将CC，XXX，V分别重复写 4 遍：

$$CC\ \ CC\ \ CC\ \ CC$$
$$XXX\ \ XXX\ \ XXX\ \ XXX$$
$$V\ \ V\ \ V\ \ V$$

第一行共有 8 个C，将 5 个C缩写成D(500)，第二行10个X缩写成C(100)，第三行缩写成XX(20)，于是简写成

〔1〕法兰克(Franks)王国的皇帝（768—814），后来(800—814)又是罗马帝国（包括西欧大部分地区）的皇帝。

〔2〕英国人，查理曼特别请他担任宫廷的教师和顾问。

$D\ C\ C\ C$

$C\ X\ X$

$X\ X$

再进一步合并，得到结果 $DCCCCXL$ (XL是40)[1]。

这只是用一位数去乘的情形，如果是多位数乘多位数，其复杂的程度不难想见。加法并不比乘法简单多少，乘法只是重复写若干遍，而加法要逐个数有多少个 I，多少个V，多少个X，……，然后再缩写成所求答案。那时精通四则运算就可以算作学者了。至于分数，那简直是难于上青天。直到现在，德文里还保留着这样的谚语，形容一个人已经陷入绝境，束手待毙，就说他已"掉到分数里去"[2]。

中世纪有人厌恶这种烦琐的数学，作了一首诗：

"乘法原可恼，除法亦不良；

黄金律，太讨厌，练习真使我发狂。[3]"

假如现在还使用这种方法来计算，很难设想百货公司是怎样进行营业的。

---

〔1〕参考徐学峥《数字的故事》(1951)。

〔2〕in die Brüche fallen.

〔3〕原文是Multiplication is mie vexation

And Division is quite as bad,

The Golden Rule is mie stumbling stule

And Practice drives me mad.

出自1570年的一份手稿，为德维斯 (Davies)所引用，放在《哈顿(Hutton)教程详解》中。见 F. Cajori, A History of Elementary Mathematics(1916) p. 189.

"黄金律" (golden rule)就是"三率法" (rule of three)。即一个比例式已知三项，求第四项的方法。

解放前，我国教育制度不良，也有人编歌谣来表示对几何学厌烦，如：人生有几何？何必学几何？学了几何几何用？不学几何又几何？

印度-阿拉伯数码传入欧洲以后，四则运算得到了简化，但和现代的方法仍然有很大的区别。

1478年在特雷维佐（Treviso）[1]出版的算术书（这是最早的印刷本算术书），讲述一种"格子"（gelosia）乘法[2]。如934×314，乘数和被乘数分别写在格子上方和右边。每两个数的积写在格子里（如4×3＝12写在右上角的格子里），斜行相加便得答数293276（图11）。

	9	3	4	
2	2/7	0/9	1/2	3
9	0/9	0/3	0/4	1
3	3/6	1/2	1/6	4
	2	7	6	

图　11

格子的画法有好几种[3]，数码的写法和现在的也不同。除了格子法外，还有多种乘法。巴巧利在1494年介绍了8种乘法，第一种就是现在通用的方法，第六种是格子乘法[4]。第一种方法当时绝少人使用，实际上它存在着很大的缺点。这里列出巴巧利所举的例子。运算是从右往左进行的，即先从个位开始，然后十位，百位，……但数字是越往左越重要，右边数字出现差错，误差往往可以忽略，左边出现差错，误差就很严重。这种计算程序偏偏从最不重要的个位数开始，通常的情况是计算越往

```
       9 8 7 6
       6 7 8 9
   ------------
     8 8 8 8 4
   7 9 0 0 8
 6 9 1 3 2
5 9 2 5 6
---------------
6 7 0 4 8 1 6 4
```

---

〔1〕意大利威尼斯之北。

〔2〕gelosia是意大利文，是一种带格子的窗。这种乘法写起来象这种窗格子，因而得名。

〔3〕V. Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p.100.

〔4〕F. Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.146.

后，出差错的可能性越大，因此这种程序很不理想．假如乘数与被乘数都是近似数，那么最后结果的 8 位数只有前 4 位有意义，而后四位无意义的数却浪费了一半的工作量．现在要改变这个习惯，去寻找更合理的方法，也许没有必要，原因是袖珍式电子计算机一旦普及，这种笔算就成为历史陈迹了．

格子乘法在历史上曾占过优势，可能由于画格子麻烦，终

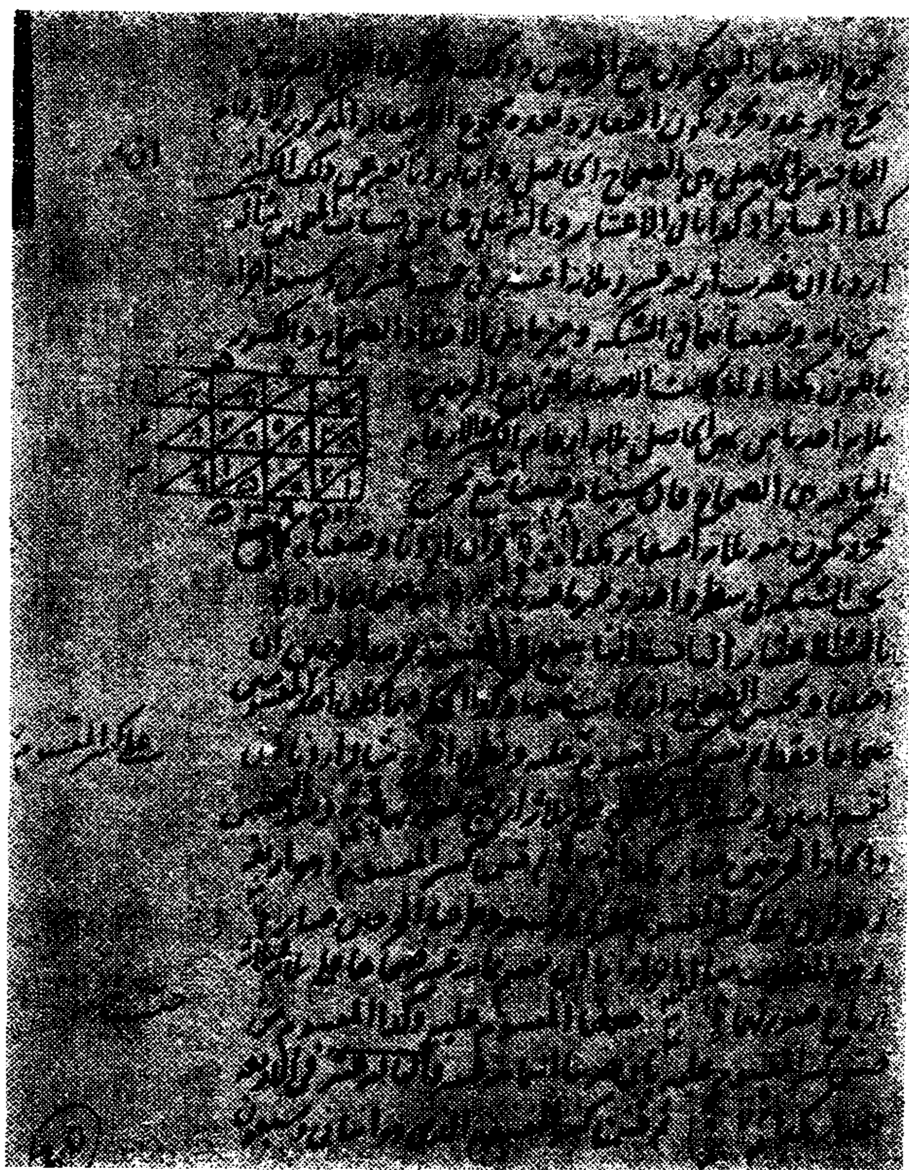


图12 《算术之钥》的一页．左边的图是格子乘法

于被淘汰。它最初出现于中亚细亚，后来传到世界各地。

阿尔·卡西1427年左右著的《算术之钥》[1]已有这种“格子”乘法（图12）。后来分别传到印度、欧洲和中国。

印度在迦尼娑（Ganeśa，约1535）的书中看到。我国最早记载在吴敬《九章算法比类大全》（1450）中，叫做“写算”。后来在程大位《算法统宗》（1592）中称为“铺地锦”，又叫写算，并编成歌：

“写算铺地锦为奇，不用算盘数可知。

……

照式画图代乘法，厘毫丝忽不须疑。”

中世纪欧洲流行的除法和现在也很不相同。斐波那契介绍了几种除法，大概也是从中亚细亚传去的。较通用的一种叫做“帆船”（galley）[2]除法或“勾划”（sratch）除法。先将被除数与除数写下来，然后进行演算，在这过程中随时将已处理完的数勾划掉。演算完毕，在沙盘或纸上留下一行又一行已划掉的数字，好象一只帆船。帆船除法在欧洲盛行了三百年以上。到了17世纪，才开始改用现行的除法[3]。

第五节　分数与小数

两数相除，除不尽时会得到分数，这是很自然的事。但最初分数概念的产生却不是由除法来的。分数被看作是整体或一

〔1〕见本书第七章第三节．p.187．

〔2〕古代大帆船或军舰，也译作“战船除法”．Arthur Gittleman, History of Mathematics（1975）p.108．

〔3〕F.Cajori, A History of Elementary Mathematics（1916）p.149．

个单位的一部分[1]．后来在运算过程中也产生了分数，它表示两个整数的商．

"分数"，拉丁文是 fractio，来自 frangere，是打破、断裂的意思．汉语"分"也是分开，部分的意思．欧几里得《几何原本》中真分数称为 $\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$，也是部分的意思[2]．卷 7 的第 3、4 定义可以译成："如果一个小数能整除一个大数，这个小数就叫做大数的因子；如果不能整除，就叫真分数．"这里我们又看到分数的另一个来源：一数不能整除另一数时，会产生分数的概念．

在《几何原本》中没有给出分数的运算方法．

三千多年前埃及纸草书就已经有分数，把所有的分数都化为单分子分数，这使得计算非常复杂．巴比伦人用60进分数，运算也很麻烦．

欧洲在15世纪以后，才逐渐形成现代分数的算法，同斯托在1522年说明$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$时，先将正方形垂直地分成 5 个长条，再水平地分成 5 个长条．德国人路多尔夫（Christoff Rudolff, 1530）计算$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$，写成下面的格式：

$$\begin{array}{cc} 8 & 9 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{12} \end{array} \quad 得 \quad \frac{17}{12}$$

〔1〕 И.Г. Башмакова, А.П. Юшкевич《记数制度溯源》，载《初等数学全书》第一分册《算术》，刘绍祖译，(1959) p.61.

〔2〕 Thomas L. Heath 英译注释本 Euclid's Elements (1956)，将 $\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$ 译成 parts. Д.Д.Мордухай-Болтовский 俄译本 Начала Евклида, книги VII-X (1949) p.9, $\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$ 译为 части（部分）.

公分母12写在最下面，相应的新分子写在上面，相加得$\frac{17}{12}$.

欧洲直到17世纪，多数的书在计算分数相加时都不要求用最小公倍数作公分母，尽管在《几何原本》第7卷中已经给出求最大公约数的辗转相除法．由此很容易算出最小公倍数来．例如科克（Edward Cocker，1631—1675）就用8000（$=5\times8\times10\times20$）来作$\frac{3}{5}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{9}{10}$，$\frac{12}{20}$的公分母．文格特（Edmund Wingate，1596—1656）注意到这一点，他给出最小公分母的求法[1]．

舒开（1484）、特兰尘（Ian Trenchant，1566）计算分数相除时先将被除数与除数都化为分母相同的分数，然后再求分子的商．维特曼（Johann Widman，1489）指出分数相除，相当于颠倒相乘．如$\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$．[2]

我国自古以来非常注重历法，每一年的月数，每一月的日数都不是整数，要制定优良的历法，不可避免要遇到分数的计算．我国古代用算筹来计算，很早就有了一套完整的分数算法．

公元前246年到公元前207年，著名的历法就有六种，通常叫古六历．其中颛顼[3]（zhuān xū）历比较精密，秦时就用这种历．以$365\frac{1}{4}$日为一年，一年有$12\frac{7}{19}$月[4]，于是每个月的平均日数是：

---

〔1〕 F.Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.202.

〔2〕 V. Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p.105.

〔3〕 传说中我国上古帝王的名字．

〔4〕 即采用19年7闰的方法来置闰．

$$365\frac{1}{4}\div 12\frac{7}{19}=\frac{1461}{4}\div\frac{235}{19}=\frac{1461\times 19}{4\times 235}$$

$$=\frac{27759}{940}=29\frac{499}{940}.$$ [1]

这牵涉到分数的除法，可见当时分数的运算已相当熟练。

司马迁《史记·律书》，《淮南子·天文训》以及更早的《管子·地员》等书讲到乐律，都提到分数的算法[2]。

《九章算术》[3]的第一章是《方田》，主要讲平面图形的面积计算，也遇到了分数的问题。这里给出相当完整的分数运算法则[4]，基本上已和现代的算法一致。分数的算法有“约分”、“合分”（加法）、“减分”（减法）、“乘分”（乘法）、“经分”（除法）、“课分”（比较分数大小）、“平分”（求分数平均数）。

“约分”和现在的约分一样。“约”是与“繁”相对来说的。刘徽在《九章算术》注里说：“设有四分之二，繁而言之，亦可为八分之四；约而言之，则二分之一也。”

“术曰：可半者半之[5]，不可半者，副[6]置分母子之数，以少减多，更相减损，求其等也，以等数约之。”

〔1〕参考朱文鑫《天文考古录》(1933)。陈遵妫《中国古代天文学简史》(1955) p.30。李俨《中国数学发展情形（续）》，载《数学通报》(1956.5)p.2。

〔2〕见本书第六章第三节(三)p.161。

〔3〕见本书第十四章。p.338。

〔4〕钱宝琮《中国古代分数算法的发展》，载《数学通报》(1954.9)p.14.钱宝琮《中国数学史话》(1957) pp.19—23.李俨《中算家的分数论》，载《中算史论丛》(一)(1954)pp. 15—43.

〔5〕如分子分母都是偶数，可先以2约之。

〔6〕“副”作相称解。

这说明约分的方法. 所谓"以少减多, 更相减损"相当于辗转相除法. "等"或"等数"就是公因子. 这是我国辗转相除求最大公因子的最早记载.

"合分"是分数加法. 以最简单的第7题为例:

"今有三分之一, 五分之二. 问合之得几何? 答曰: 十五分之十一."

"术曰: 母互乘子, 并以为实, 母相乘为法, 实如法而一. 不满法者, 以法命之. 其母同者, 直相从之."

"实"是被除数(即分子), "法"是除数(即分母). 分母交互乘分子, 加起来作为被除数, 分母相乘作为除数. 即 $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. 本例是 $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{1\times5+2\times3}{3\times5}=\frac{11}{15}$.

"实如法而一", 是将假分数化为带分数的运算. 设有分数 $\frac{A}{B}$, 假设$A>B$, 在A中取出和B相等的数(实如法), 就得到整数1. 即

$$\frac{A}{B}=\frac{B+(A-B)}{B}=1+\frac{A-B}{B}.$$

如果$A-B$仍大于B, 可重复这个手续.

我国古代分数叫做命分. 《夏侯阳算经》[1]里说: "夫算之法, 约省为善. 有分者通之, ……, 可约者约之, ……于此不得, 乃为之命分." 《数理精蕴》(1714)下编卷二《命分》: "凡不尽之数, 得分母中之几分者, 即命为几分之几, 是以命分之一法." 这句话可以作为"不满法者, 以法命之"的注释.

[1] 钱宝琮校点《算经十书》(1963)p.551, 认为是8世纪的书.

“其母同者，直相从之”意思明显：如果分母相同，就直接将分子相加。

刘徽在注里说：“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。”所以这种方法叫做“齐同术”。

此外还有“减分”、“乘分”、“经分”等运算法则。大体上已和现代的算法一致。只是通分时没有明确要求用最小公分母。然而在实际计算中，常常用最小公分母。例如《九章算术》第四章《少广》第 6 题，计算 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$，就用420（最小公倍数）作公分母。

总之，《九章算术》是世界上系统地叙述分数的最早著作，比欧洲大约早1400年。这是值得我们自豪的。

关于分数的写法，还有一件值得注意的事。我国古代用算筹来做除法，“实”（被除数）列在中间，“法”在下面，“商”在上面。除到最后，中间的实可能还有余数，就列成图13的样子[1]：

商 64

实 38

法 483

图 13

相当于带分数 $64\frac{38}{483}$。

《孙子算经》（约 3 世纪）记述得很清楚：“凡除之法，

〔1〕李俨《中国数学大纲》（上册）（1958）第二编第十七章。

……除得在上方。……实有余者，以法命之，以法为母，实余为子。”

这种排法和现在一样，分子在上，分母在下，只是带分数的整数部分排在上面。不由得使我们想起印度的巴哈沙利桦树皮残简[1]，将$\frac{1}{3}$写成$\begin{matrix}1\\3\end{matrix}$而$1\frac{1}{3}$写成$\begin{matrix}1\\1\\3\end{matrix}$，也是把带分数的整数部分写在上面[2]。这可能是文化交流的结果。在时间上，巴哈沙利残简晚得多，而筹算方法在《孙子算经》以前很多个世纪已经成型，因此有理由认为印度的分数记法是中国传去的[3]。婆什迦罗《丽罗娃提》[4]也采用这种写法。如

$$3+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\text{写作}\left|\begin{matrix}3&1&1\\1&5&3\end{matrix}\right|\text{通分以后变成}\left|\begin{matrix}45&3&5\\15&15&15\end{matrix}\right|$$

后来传到中亚细亚，也将分子写在上，分母写在下。目前所发现的最早的分数线是在阿尔·哈萨(Al-Hassâr，[5]约1175)的著作中。按照他的写法，

$$\frac{3\ \ 3\ \ 2}{5\ \ 8\ \ 9}\ \text{表示}\ \frac{2+\dfrac{3+\dfrac{3}{5}}{8}}{9}.$$

〔1〕参看本章第三节，p.72。

〔2〕F.Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I, (1928) p.78.

〔3〕钱宝琮《中国古代数学的伟大成就》，载《科学通报》2卷10期（1951.10）p.1042.钱宝琮《算术教材中祖国数学家的成就》，载《数学教学》（1955）2期，p.16。

〔4〕本书第六章第二节，p.141.

〔5〕这名字是“计算者”的意思。

阿拉伯文的书写是从右到左的。斐波那契《算盘书》沿用他们的习惯，式子也是从右到左，整数部分写在分数的右边，将 $12\frac{1}{2}x$ 写成"*radices* $\frac{1}{2}12$"。这是在欧洲最早出现的分数线。

分数线和许多其他符号一样，没有马上被大家采用。14世纪中叶还有用 $3\overline{|5|}$ 表示 $\frac{3}{5}$ 的。为了节省地方，棣么甘推荐用 a/b 表示 $\frac{a}{b}$。这种记法在18世纪末叶已经出现[1]。

小数（decimal fraction）[2]就是十进分数，是以10的乘幂为分母的分数。它的普遍使用在欧洲很晚才出现。原因可能是巴比伦的60进小数传到西方以后，经过希腊人的提倡，逐渐取得统治地位。当时科学著作全都用60进分数，习惯一时改不过来。16世纪以后，较方便的十进分数虽然已进入了学术领域，然而度量角度和时间的60进分数一直保留到现在。

中亚细亚的阿尔·卡西是世界上除中国以外第一个系统地应用十进分数的人。在《算术之钥》（1427）中，他运用了当时通行的60进记数法，同时又熟练地掌握了十进分数，并指出两者的互换法则。在《圆周论》中，他用十进分数（小数）给出2π的值，前17位是有效的。同时给出2π用60进分数表示出来的值。[3] 欧洲直到16世纪末叶才完全掌握了小数的性质和运算方法。

斯提文（Simon Stevin，1548?—1620?）的《论十进》（La Disme）一书，1585年在莱顿（Leyden）出版。第一次明

---

〔1〕F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1928) pp. 89, 269, 311, 312. vol. II, p. 49.

〔2〕decimal 来自拉丁文 decem(10)。

〔3〕见本书第七章第三节。p.187.

确地陈述了小数的理论，不过在当时没有立刻引起很大的反响。斯提文的记号不是很方便的。如

　　　　　　　◎①②
32.57 用 3 2 5 7 或 3 2◎5①7②

来表示。

在斯提文前后，有不少人提出类似的发明[1]．1484年波基(Pietro Borgi)[2] 作除法的时候，如果除数是10的倍数，例如123456÷600，先将末两位用竖线分开 1234|56，然后被 6 除。这竖线很象现在的小数点。但作者的原意仅仅是为了除法的方便，未必有小数的概念。

1492年培罗斯(Francesco Pellos，法国人)在都灵(Turin，意大利西北）出版的商用算术首次出现了小数点。它的作用象波基一样，也是为了被带有 0 的数除时的方便。

现在，小数点是作为整数部分与小数部分分界的记号。在这个意义下使用小数点，最早是克拉维斯。他的《星盘》(Astrolabium) 1593年出版于罗马[3]，这本书使用了小数点。后来在他的《代数学》(Algebra，1608）中更明确地以小点作为整数部分与小数部分的分界。

也有人用逗号“，”来作分界记号。例如对数的创始人纳皮尔就用逗号（有时也用小点）来作分界号。直到19世纪末，还有种种的写法，如2.5写成 2|5，2'|5，2˙5，2,5，2'5，2‘5，2▲5，$2,_5$，$2._5$ 等等。

---

〔1〕 F.Cajori, A History of Mathematical Notations, vol.Ⅰ(1928)，有详细的记载。

〔2〕 意大利人，他的算术书是最早的印刷书之一。

〔3〕 李之藻(1565—1630)根据这书编成《浑盖通宪图说》。

现在小数点的使用大体分两派，欧洲大陆派（德国、法国、苏联等）用逗号，小点留来作乘法的符号，而乘法避免用×，理由是易与字母x相混。英、美派小数点用小点而不用逗号，逗号用来作分节号（每三位数分为一节）。如圆周率写成3.141,592,653,…。大陆派则写成 3,141 592 653…。没有分节号，每三位数之间空出一小格。

我国自古以来就用十进记数法，所以小数的应用开始很早。刘徽注《九章算术》，在《少广》章“开方术”下面说：“微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细，……。”即开方开不尽时，用十进分数（小数）来表示。这比斯提文早1300年以上[1]。

我国元朝刘瑾[2]（1300年左右）著《律吕成书》，将

1 0 6 3 6 8 . 6 3 1 2 写成[3]：

| □ ⊥ ||| ⊥ ╥

十万千百十忽　⊥ ||| 一 ||

千百十分

把小数部分降低一格，这是世界最早的小数表示法。比斯提文早200多年，比阿尔·卡西也早100多年。

总之，我国在十进位值制记数法、分数的运算、小数的应用等方面都远远走在世界各国的前面。

〔1〕 钱宝琮《中国数学史话》(1957) p.91,《十进小数》。

〔2〕 字公瑾，江西安福人。

〔3〕 李俨《中国数学发展情形（续）》，载《数学通报》(1956.5)p.2.
严敦杰《中国古代数学的成就》(1956) p.9.

第五章　希腊的几何学

第一节　引　　言

"几何"（几何学）一词，拉丁文是 geometria，来自希腊文 γεωμετρία，是由 γέα（土地），μετρεῖν（测量）二字合成[1]，原是土地测量的意思．可见几何学直接起源于农业生产的需要．

根据历史学家希罗多德的说法，埃及的几何学起源于尼罗河泛滥后土地的重新测量[2]．别的国家也有类似的情况．例如中国，平面几何图形都叫做田．如正方形叫方田，矩形叫广田或直田，三角形叫圭田，梯形叫斜田或箕田，圆叫圆田等．立体图形有时直接用形状相似的物体来称呼，如圆锥也叫聚粟，类似草房子顶的楔形叫刍甍等等[3]．这也说明几何学是由田亩面积的度量和实物体积的计算所引起的．

利玛窦，1607年和徐光启合译欧几里得《几何原本》前 6 卷，在北京出版．这是欧洲文艺复兴以后，西方数学输入我国的开

---

〔1〕Webster's International Dictionary of the English Language, (1902).

〔2〕见本书第二章第一节．p.16．

〔3〕李俨《中国算学小史》(1930) pp. 34—38．

始．几何的名称便是这样来的．原书是克拉维斯（Christopher Clavius, 1537—1612.2.6）[1] 校订的 Euclidis Elementorum Libri XV（1591 出版于罗马，后再版多次）．

利、徐两人为什么要用"几何"这两个字来译geometria？有两种猜测．较流行的说法认为几何两字是geo的音译，因为发音近似．

日本中村正直（1832—1891）在《几何学序》（1873）中记载：[2]"几何者，问多少之义．算学者，则亦当用此字．何独察物形之学，而称几何也？英国艾约瑟先生，偶见访吾庐，语次及此．先生曰：希腊语GEO者地也，几何音仿佛 GEO，盖或由是用此字也．余疑始解．"

那时离开《几何原本》的最初翻译已三百多年，这只是一种猜测．另一种意见认为几何不是geo的音译，而是mathematica（数学）或magnitude（数量、大小）的意译[3]．

我们认为很可能是geometria一字的音、意并译．我国早已有算学、数学等名称，和mathematica相当，翻译时无需另造新词．《几何原本》前6卷讲的是几何，7—10卷讲数论，但全用几何方式来叙述，所以它基本上是一部几何书[4]．其中也牵涉到数量大小的关系．几何两字既和geo音近，又和数量

---

〔1〕1537 生于德国班堡(Bamberg)，1612.2.6卒于罗马，曾是利玛窦的几何教师．原译作丁先生，因Clavius在拉丁文里是钉子的意思，见李俨《中算史论丛》（二）（1954）p.41.

〔2〕林鹤一《和算研究集录》下卷（1937），《几何ト代数ト ノ 语源ニ就テ》p.403.

〔3〕《数学通报》（1959.11）p.31,《几何不是Geo的译音》.

〔4〕徐光启《刻几何原本序》："几何原本者，度数之宗，所以穷方圆平直之情，尽规矩准绳之用也."

大小的意义相当，故采用这两个字。

《几何原本》前6卷出版后，几何的名称并没有通行。两个半世纪以后，李善兰和伟烈亚力续译《几何原本》后9卷（1857年出版），沿用几何的名称。几何之名，重新受到注意。但是直到本世纪初，几何的名称一直没有统一。另一个较通用的名称是形学。狄考文和邹立文、刘永锡编译的《形学备旨》是当时的代表作，流传十分广泛。[1]从1885年到1910年重印11次之多。此外还有叶耀元《形学补编》（1889），王泽沛《形学演》（1895）等。

《形学备旨》1910年第11次印刷，徐树勋成都翻刊本，改名《续几何》[2]。渐有用几何取代形学的倾向。在这前后，以几何作书名的已不罕见。如杨作枚《几何补编》（1881），黄庆澄《几何释义》（1898），潘应祺《几何赘说》（1906），傅骥伯《新辑几何》（1912）等。也有的书仍用形学之名，如英威里孙撰，陈訨译《形学课本》，《立体形学课本》（1906）等。近几十年来，形学一词逐渐被淘汰。

17世纪解析几何产生以前，所谓几何，就是欧几里得几何。希腊人对此作出了巨大的贡献，历史的功绩不可磨灭，本章着重介绍希腊人的成就。

古希腊的地理范围，除了现在的希腊半岛以外，还包括整个爱琴海区域和北面的马其顿和塞雷斯，意大利半岛和小亚细亚等地。

---

〔1〕丁福保、周青云《四部总录算法编》（1957）p.55.

〔2〕李俨《中算史论丛》（二）（1954），《近代中算著述记》p.252.

希波战争[1]以后，雅典取得希腊城邦的领导地位，海上贸易更加发达．在伯里克利士(Pericles，公元前495？—429年)执政时期（史称希腊的黄金时代），经济生活达到了高度的繁荣．雅典出现了手工业的作坊，并且有相当精细的分工．马克思曾引用希腊历史家塞诺芬（Xenophon，约公元前430—355年）的著作来说明古希腊社会分工的情形[2]．这种分工使生产力显著地提高，大量的奴隶劳动创造了社会财富．在这个基础上产生了光辉灿烂的希腊文化．哲学、艺术、文学、科学等各方面出现百花齐放，各炫异采的空前盛况．

希腊数学发展的历史可分为三个时期．第一期从爱奥尼亚学派到柏拉图学派为止，约当公元前7世纪中叶到公元前3世纪；第二期是亚历山大前期，从欧几里得起到公元146年希腊陷于罗马为止；第三期是亚历山大后期，是罗马人统治下的时期．

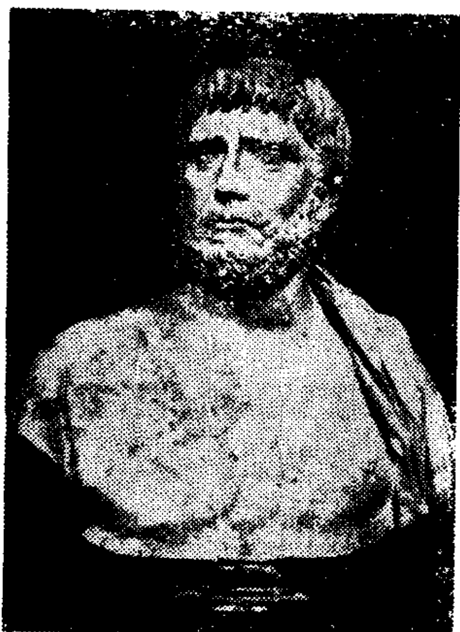
第二节 从塔利斯到柏拉图学派

（一）爱奥尼亚学派

从古代埃及、巴比伦的衰亡，到希腊文化的昌盛，这过渡

〔1〕从公元前492年起，亚洲的波斯发动侵略希腊的战争．希腊各城邦在雅典和斯巴达的领导下展开了激烈的战斗．在马拉松（Marathon，公元前490年）和萨拉密（Salamis，公元前480年）海战役中希腊取得了决定性的胜利．

〔2〕马克思《资本论》一卷四篇十二章《手工与手工制造业》注81，郭大力、王亚南译（1953）p.443．



塔利斯（Thales）

期间没有留给我们什么数学书籍，所以目前的了解是不够的．不过我们却知道希腊的数学和希腊的商人通过旅行交往接触到古代东方的文化有密切关系．爱奥尼亚（Ionia）位于小亚细亚的西岸，“近水楼台先得月”，它比希腊其他地区更容易吸收巴比伦、埃及等古国累积下来的经验和文化．在爱奥尼亚，商人具有强烈的活动性，氏族贵族政治为商人的统治所代替，对于思想进一步自由而大胆的发展，创造了有利条件．同时，城邦内部的斗争，帮助摆脱传统信念，也推动了学术的发展．在希腊没有特殊的祭司阶层，也没有必须遵守的教条，因此希腊人有相当程度的思想自由，这大大有助于科学和哲学从宗教分离开来．这一点是古代东方所不能达到的．

爱奥尼亚最繁盛的城市是米留都（Miletus，小亚细亚西南角海岸）．地居东西方交通的要冲，也是希腊第一个享有世界声誉的学者塔利斯（Thales，Θαλῆs，约公元前 640—546 年）的故乡．塔利斯早年是一个商人，以后游访过巴比伦、埃及等地，很快学会了天文和几何知识．

自然科学发展的初期，还没有从哲学分离开来．所以每一

个数学家都是哲学家[1]，正象我国古代的数学家都是历法家一样。要了解人与自然的关系，以及人在宇宙中所处的地位，首先要研究数学，因为数学可以帮助人们在混沌中找到秩序，按逻辑推理求得规律。

塔利斯是公认的希腊哲学家的鼻祖。他创立了爱奥尼亚哲学学派，摆脱了宗教，从自然现象中去寻找真理，否认神是世界的创造者。他认为处处有生命和运动，并以水为万物的根源。塔利斯有崇高的声望，被尊为七贤之首。[2]

当时有美地亚国（Media）[3]和吕地亚国(Lydia，位于今土耳其西部）发生剧烈战争。连续五年未见胜负，横尸遍野，哀声载道。塔利斯预先知道有日食，便扬言上天反对战争，某月某日必用日食来作警告。果然到了那一天，两军正在酣战不停，突然太阳失去光辉，百鸟归巢，明星闪烁，白昼顿成黑夜。双方士兵将领大为恐惧，于是停战和好，后来两国还互通婚姻。[4]

这次战争的结束当然还有其他政治经济上的原因，日食只起促进作用。不过我们可以由此知道塔利斯已知日食预测。历史家还反过来根据日食的日期来确定这次战争的年代。据考证

---

〔1〕“哲学家”的拉丁文是philosophus，源出希腊文 *φιλόσοφος*，是*φίλος*（爱）*σοφός*，（智）二字合成。原义是“爱智者”。

〔2〕七贤的说法不一，各书列举不同的人，但总包括塔利斯在内。

〔3〕位于现今伊朗、阿富汗北部和土耳其东部。有的学者说美地亚人就是阿塞拜疆人的祖先。

〔4〕古希腊希罗多德《历史》（Herodoti：Historiae），王嘉隽译（1956）p. 203.

这次日食发生在公元前585年5月28日[1]. 这大概是应用了迦勒底人发现的沙罗周期，根据公元前603年5月18日的日食推得的。

塔利斯在埃及的时候，应用两个等角三角形对应边成比例的定理，测出金字塔的高度，使埃及法老阿美西斯（Amasis，二十六王朝）大为惊讶. 据普鲁塔克（Plutarch，约公元46—120年，希腊历史家）的记载，塔利斯将一根杖竖立在平地上，利用塔影长与杖影长的比，等于塔高与杖高的比，算出塔高. 这是西方测量术的滥觞. 有些学者如普利尼等说塔利斯是根据当杖影长和杖长相等时，塔高与塔影也相等的道理推得的.

这两种说法都有疑问. 问题在于金字塔不是一根杆，它的底很大，影长是无法直接量得的. 丹齐格（Tobias Dantzig）[2]指出这一点，并提出几种可能的办法. 较合理的办法是作两次观测，然后利用相似形的关系来算出塔高. 但他没有提到也许是最方便的办法：第一次观测时记下杖顶影子的位置a，和塔顶影子的位置A，第二次观测时杖顶影子在b处，塔顶影子在B处. 那么$AB:ab$就等于塔高与杖高的比. 如果要避免用比例式，可以等待ab和杖长相等时度量AB的长，AB自然和塔高相等. 不管用那一种方法，可以相信塔利斯懂得比例的道理. 这从他所证明过的命题看出来.

塔利斯在数学方面的划时代贡献是开始了命题的证明. 他

---

〔2〕奥国天文家奥泊尔子（T.V.Oppolzer，1811—1886）推算公元前1207到公元2161年的3368年内日食8000次，月食5200次，编成《日月食典》（Canon der Finsternisse）.据此确定塔利斯日食的时间是公元前585年5月28日下午三时.

〔2〕T.Dantzig，The Bequest of the Greeks（1955）pp.46—55.

所得到的命题是很简单的．如圆被任一直径所平分；等腰三角形底角相等；两线相交，对顶角相等；相似三角形各边成比例；对半圆的圆周角是直角；两三角形两角与一边对应相等，则三角形全等．作为命题来看，这似乎是十分简单和琐碎的，并且仅凭直观就能判断．可是塔利斯并不满足于知其然，还要穷究所以然的道理．塔利斯曾经证明了这些命题．

命题的证明，就是借助一些公理或真实性业经确定的命题来论证某一命题真实性的思想过程．它标志着人们对客观事物的认识从感性上升到理性．这在数学史上是一个不寻常的飞跃．在数学中引入逻辑证明，它的重要性从下面这几个方面看出来：一、保证命题的正确性，使理论立于不败之地．有些命题，特别是作为公理的命题是人类长期经验的总结，但是不可能（也不必要）每一个命题都要经过千百年实践证明才承认它的真理性．而且有的命题本身就是逻辑的推论．二、揭露各定理之间的内在联系，使数学构成一个严密的体系，便于流传，并为进一步发展打下坚实的基础．三、使数学命题具有充分的说服力，令人深信不疑．

欧德莫（Eudemus，Εὔδημος，约公元前 335 年）是希腊的数学史家，曾著《几何学史》一书，虽已失传，但普罗克拉斯注欧几里得《几何原本》时，曾录其大要．从这书可以窥见希腊几何的大致情形．欧德莫和一些早期学者屡屡提及塔利斯知道上述那些命题．并说塔利斯利用两三角形两角一边对应相等，则三角形全等的定理，测定船舶离岸的远近，应用已知的理论去解决实际问题．塔利斯对于其他自然科学问题，也是不仅回答“怎么样”？而且企图回答“为什么这样”？他被誉为

希腊数学、天文、哲学之父，不是没有道理的．[1]

爱奥尼亚学派的著名学者还有安那西曼德（Anaximander，'Αναξίμανδρος，约公元前611—547年）和安那西曼尼（Anaximenes，'Αναξιμένης，约公元前585—528年）等．他们对后来的毕达哥拉斯有很大的影响．

（二）毕达哥拉斯学派

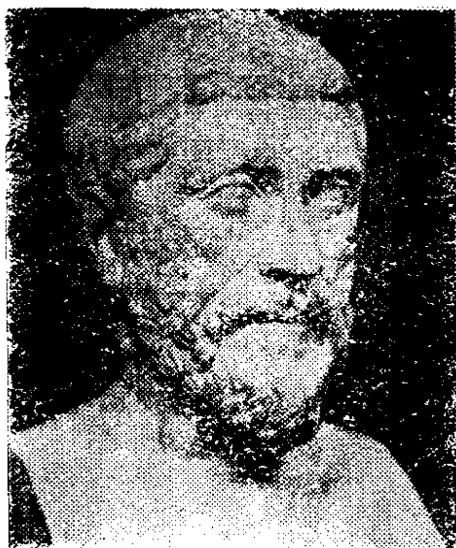
毕达哥拉斯（Pythagoras，Πυθαγόρας），公元前580至568年之间生于撒摩斯岛（Samos，今土耳其西岸小岛），公元前501或500年卒于他林敦（Tarentum，意大利半岛东南角）．早年留学埃及，也许到过巴比伦和印度．后来在大希腊（Magna Græcia，今意大利南部）的克罗托那（Crotona）地方建立一种秘密的组织．这种组织遍及希腊各地，后来在政治斗争中遭受破坏，毕达哥拉斯逃到他林敦，终于被杀害．他死后，他的学派还继续存在两个世纪之久．

毕达哥拉斯非常重视数学，企图用数来解释一切．这个学派不仅仅认为万物都包含数，而且说万物都是数．[2]这学派有一种习惯，就是一切发明都归功于学派的领袖，而且常常是秘而不宣．所以后人很难知道究竟是谁在什么时候发明的．

---

〔1〕Thomas Heath (1861—1940), A History of Greek Mathematics (1921), vol. I, pp. 118—140.

〔2〕T. Heath, A History of Greek Mathematics (1921), vol. I, p. 67.



毕达哥拉斯 (Pythagoras)

毕达哥拉斯本人发现人所共知的"勾股定理"[1]的时候，欢欣之情不可言状．传说他宰了一百头牲畜来祭缪斯女神 (Muses，神话中掌管文艺、科学的女神)，以酬谢神的默示．[2]

勾股定理，早已为巴比伦人所知．不过最早的证明，大概还应归功于毕达哥拉斯学派．有的学者猜想这证明是从研究垛积数 (figurate number) 的关系得出来的．[3]可惜证法已失传．现在教科书所采用的面积证法，出自欧几里得《几何原本》卷 1 的47题，是欧几里得首先给出的．

毕达哥拉斯学派特点之一，是将算术与几何紧密联系起来．如他们发现用三个整数表示直角三角形边长的一种公式：$2n+1$，$2n^2+2n$ 分别是二直角边，则斜边是 $2n^2+2n$

[1] 外国人一律称为"毕达哥拉斯定理"．解放后，我国曾展开关于这定理命名问题的讨论，有的主张叫"商高定理"，有的主张叫"陈子定理"．见《中国数学杂志》1 卷 1 期 (1951.10)，1 卷 4 期 (1952.10)．后来决定不用人名，而称为"勾股弦定理"，最后确定叫"勾股定理"，理由是有勾、股就必有弦，故弦字可省去．

[2] 有的书说只宰了一头牛，也有的说祭神的牛是面粉做的．

[3] V. Sanford, A Short History of Mathematics (1930) P.272.

+1.[1] 这公式属于算术，又属于几何。这学派又将自然数分为若干类：奇数，偶数；奇数乘奇数，偶数乘偶数；素数，完全数（一个数等于除它本身以外的所有因子之和，如$28=1+2+4+7+14$）；三角数（1,3,6,10,…）；平方数（1,4,9,16,…）；五角数（1,5,12,22,35,51,…）等等。又注意到连续的奇数和必为平方数：

$$1=1^2,$$
$$1+3=2^2,$$
$$1+3+5=3^2,$$
$$1+3+5+7=4^2,\cdots\cdots$$

这都和几何有关。

有些古代学者如斯特拉博（Strabo，公元前66—24年，希腊地理学家）说毕达哥拉斯曾在巴比伦学习过，有的甚至说他到过印度。[2] 他对数字的神秘观点类似早期的巴比伦，而整个哲学的气氛十分接近印度。值得注意的是，勾股定理在毕达哥斯之前，巴比伦、中国都早已知道，和毕达哥拉斯有什么关系，有待进一步研究。

根据勾股定理，导致了无理量的发现。假设直角三角形是等腰的，直角边是1，那么弦是$\sqrt{2}$，它不可能用任何的"数"（有理数）表示出来，即直角边与弦是不可通约的。这发现是毕达哥拉斯学派最卓越的功绩，也是整个数学史上一项重大发

---

〔1〕满足 $x^2+y^2=z^2$ 的任意三个正整数，现在叫做毕达哥拉斯数，它的一般形式是$2mn$，m^2-n^2，m^2+n^2（斜边），其中$m,n(m>n)$是任意两个正整数。毕达哥拉斯的公式并不能表示所有的解，只能表示弦与一个直角边的差是1的那种直角三角形的三边。

〔2〕D.E.Smith, History of Mathematics, vol.Ⅰ(1923) p.71.

现.[1]

几何方面，他们证明了平面可用正三角形、正方形或正六边形填满，空间可用立方体填满. 又知道正四面体、六面体、八面体和二十面体，并用这四种正多面体来表示火、风、土、水“四大元素”. 后来又发现了正十二面体，但没有相应的第五种元素，于是就用来代表宇宙全体.

这个学派在天文方面的贡献也不少. 首创地圆说，认为日、月、五星都是球形，浮悬在太空中. 他们认为球是最完美的立体，圆是最完美的平面图. 毕达哥拉斯还是音乐理论的始祖，他阐明了单弦的调和乐音与弦长的关系.

这一派的数学家还可以举出阿开塔斯（Archytas，'Αρχύτας，约公元前428—347年），他曾利用圆柱解倍立方问题，并发明作曲线的器械.

（三）诡辩学派

希波战争以后，希腊商务繁盛，雅典成为人文荟萃的中心. 爱奥尼亚派的哲学家安那萨哥拉斯（Anaxagoras，Αναξαγόρας，约公元前499—427年）[2]开始将爱奥尼亚哲学输入雅典. 毕达哥拉斯派的人也群聚于此，只是过去秘密的作风已不复见. 雅典人崇尚公开的精神. 在公开的讨论或辩论中，要想取得胜利，必须具有雄辩、修辞、哲学及数学等知

〔1〕有的学者如阿尔曼（G.J. Allman，1824—1904）提出另一种见解. 认为这学派对求几何中项特别感兴趣，于是有“什么是1，2这两个‘神圣’的数的几何中项”的问题，这导致无理量的发现.

〔2〕曾研究化圆为方问题及透视问题.

识．于是“诡辩学派”应运而生．“诡辩”（sophism，σόφισμα）一词，原出 σοφίζειν，是使人智慧的意思，也译作“哲人学派”或“智人学派”．

诡辩学者经常出入群众的集会场所，发表应时的演说．他们以教授学生修辞学、雄辩术、文法、逻辑、数学、天文等科为职业．最有名的有普罗他哥拉斯（Protagoras，约公元前481—411年），哥尔基亚（Gorgias，约公元前487—380年），安提丰（Antiphon，'Αντιφῶν，约公元前430年）等人．

诡辩学派的数学研究中心，是所谓三大问题：1．三等分任意角；2．倍立方——求作一立方体，使其体积是一已知立方体的二倍；3．化圆为方——求作一正方形，使其面积等于一已知圆．[1]

这些问题的难处，是作图只许用直尺（没有刻度的尺）和圆规两种工具．后来证明三大问题都是不可能解决的．正因为不能用尺规来解决，常常使人闯入新的数学领域里去．例如激发了圆锥曲线，三、四次代数曲线及“割圆曲线”的发现．三大问题还和近代的方程论、群论等数学部门有关．

三大问题如果不限制作图工具，便很容易解决，而且早在希腊时代已有种种解决的办法．喜庇亚斯（Hippias，'Ιππίας，约公元前425年）创设一种“割圆曲线”（quadratrix），有时称为地诺斯特拉图（Dinostratus，Δεινόστρατος，约公元前350年）曲线，因为后者曾详细研究过．这曲线可用方程

〔1〕见本书第三章第四节．p.45．
F. Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.56.

$x=\frac{y}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}y}$来表示。[1]它不但可以三等分任意角，而且可解决化圆为方问题。

诡辩家安提丰提出一种“穷竭法”，颇有价值。它是近代极限理论的雏形。先作圆内接正方形，将边数加倍，得内接八边形，再加倍，得十六边形。这样继续下去，安提丰深信“最后”的正多边形必与圆周相合。也就是多边形与圆的“差”必会“穷竭”，于是便可以化圆为方了。[2]结论虽然是错误的，但却提出了一种求圆面积的近似方法，成为阿基米德割圆术的先导。

（四）爱利亚学派

爱利亚（Elea，意大利半岛的南端）的齐诺（Zeno，Ζήνων，约公元前496——430年）是这学派的主要人物，他是巴门尼底斯（Parmenides，Παρμενίδης，约公元前460年）的门徒。齐诺的哲学含有辩证法的因素。他第一次企图揭露运动的矛盾，提出了四个违背常识的悖论。[3]这些悖论给学术界以极大的骚动，余波至今未息。

〔1〕D. E. Smith《圆周率π之历史及其超绝性》，郑太朴译，载《数论尺规作图及周率》（1930）p.111.

〔2〕V. Sanford, A Short History of Mathematics (1930) pp.259, 310. T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I (1921) p.222.

〔3〕T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I (1921) pp. 271—283.

这四个悖论是：

1. 二分说(dichotomy)。一个物体从甲地到乙地，永远不能到达。因为想从甲到乙，首先要通过道路的一半；但要通过一半，必须通过一半的一半，即道路的$\frac{1}{4}$；要通过$\frac{1}{4}$，必先通过$\frac{1}{8}$，这样分下去，永无止境。齐诺的结论是此物根本不能开始运动，因为它被道路的无限分割阻碍着。

2. 阿基里斯追龟说。阿基里斯(Achilles)是荷马（Homer, Ὅμηρος，公元前1000年左右希腊伟大诗人）史诗《伊里亚特》（Iliad）中的英雄，以善跑著称。齐诺说阿基里斯追乌龟，永远追不上。比方说，阿基里斯的速度是龟的10倍，龟在前面100米．当阿基里斯跑了100米到达龟的出发点时，龟已向前走了10米；阿基里斯再追10米，龟又已前进了1米；阿基里斯再追1米，龟又前进了$\frac{1}{10}$米，这样永远相隔一小段距离，所以总也追不上。

3. 飞箭静止说。飞箭在任何一个确定的时刻只能占据空间的一个特定的位置，因此在这一瞬间它就静止在这个位置上，于是所谓运动，只是许多静止的总和。

4. 运动场(stadium)问题。一段时间和它的一半相等。为简单起见，用线段的运动来说明齐诺的论点。设有三根长$4d$的线段 A，B，C，每根都分为4等分（每分长d）。用 a_0，…，a_4；b_0，…，b_4；c_0，…，c_4 来记这些分点。

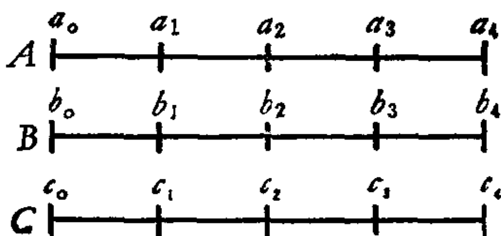


图 14

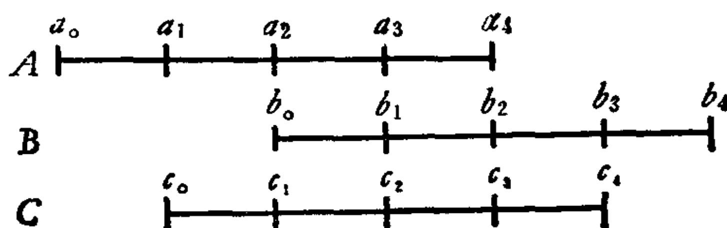


图 15

开始时首尾对齐（图14）。现在让A，B各以相反的方向等速运动，而C不动。经过时间t之后，B上的b_0和c_1对齐，而原先b_0是和c_0对齐的，故b_0通过了距离d。另一方面，a_4原先是和b_4对齐的，现在和b_2对齐（图15），可见a_4通过了$2d$的距离。要想a_4通过d的距离（和b_3对齐），只要一半时间就够了。齐诺的结论是时间的一半和它的全体相等。这问题错误的地方很容易看出，不过倒使我们想起了近代相对论里的所谓时间相对性的问题。

齐诺本来很有可能进一步导出极限的思想，但他却因此否认运动的真实性，说运动是感官的错觉，而世界是静止的存在。这样他就不会得到正确的结论了。

（五）原子论学派

德谟克利特（Democritus，Δημόκριτος，约公元前 460—357 年）[1] 生于阿布提拉（Abdera，爱琴海北岸）。他和他的老师留基伯（Leucippus，Λεύκιππος）是原子论学派的创始

〔1〕生年各书的记载在公元前494到460年之间。

人. 德谟克利特不仅是数学家、哲学家，而且有关于物理、气象、动物和美学的丰富著作，是几乎达到百岁高龄的学者. 可惜他的书流传下来的很少.

他到过东方旅行，在埃及住过，并说自己在作图和证明方面已超过了埃及的测量者(harpedonaptæ)．[1]

德谟克利特认为万物的始源只有两个：原子与虚空. “原子” (atom，拉丁文atomus来自希腊文 ἄτομος，是不可分割的 思) 是不可分的物质粒子，永远处于运动状态之中. 这种见解给宗教以毁灭性的打击.

在数学方面，德谟克利特应用了原子的观点. 他认为线段、面积和立体，是由有限个不可再分的原子构成的. 计算体积就等于将这些原子集合起来. 这种不甚严格的想法骤然看来好象不大合理，但是这种“原子法”和前面提到安提丰的“穷竭法”却是古代数学家发现新结果的重要线索. 阿基米德说德谟克利特是第一个得出圆锥或棱锥体积是等底等高的圆柱或棱柱的1/3的人. 这命题的最早证明属于攸多克萨斯 (Eudoxus, Εὔδοξος，约公元前408—355年)．阿基米德自己也用过这种方法寻找问题的答案，然后再用严密的理论使其精确化. 直到16世纪的刻卜勒，将圆看作无数顶点在圆心上的三角形的和，还带有“原子法”的遗风.

(六) 柏拉图学派

布罗奔尼撒战争 (公元前431—405年，斯巴达与雅典之

[1] 来自希腊文 'Αρπεδονάπται，原意是“拉绳子的人”。D. E. Smith, History of Mathematics (1923) P.81.

战）以后，雅典政治地位虽已衰微，但哲学、文学、科学的地位，仍然很巩固。柏拉图（Plato, Πλάτων, 约公元前430年[1]生于雅典，公元前349年卒），是雅典的大哲学家。曾跟从苏格拉底（Socrates, Σωκράτης, 公元前468—399年）学习。颇受老师逻辑思想的影响，这和他日后将几何奠基在逻辑的基础上很有关系。

柏拉图非常重视数学，传说在他的学园门口写着："不懂几何者不得入"（Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην）！[2]

柏拉图鉴于毕达哥拉斯所给出点的定义（点是有位置的单位）不够明确，于是另立定义："点是直线的开端"，或"点是不可分割的线"。这两个定义和我国《墨经》中的"端，体之无厚而最前者也"。及"体，若二之一，尺之端也"极其相似。

柏拉图在教学中为科学奠定了基础，坚持准确的定义、清楚的假设和逻辑的证明。他对数学有很大的功劳。在他的倡导下，柏拉图学派中产生了不少数学家。

攸多克萨斯曾一度是柏拉图的学生。在天文、几何、医学和法律方面都有值得称道的成就。他是最早介绍球面天文和描述星座的希腊科学家。在数学方面，最大的功劳是创立了比例论。欧几里得《几何原本》第5卷《比例论》大部分采自攸多克萨斯的工作。攸多克萨斯的比例论完全排除了毕达哥拉斯学派只能适用于可通约量的算术方法，纯粹用公理法建立理论，因此

〔1〕各书给出生年在公元前427—347之间。

〔2〕Robert Edouard Moritz, Memorabilia Mathematica, (1914) p.292.

没有区别可通约和不可通约的必要。

现今数学中所盛称的“阿基米德公理”，阿基米德明确地把它归功于攸多克萨斯。在分析学上常用的说法是：“对于任意二正实数a,b，必存在自然 n，使得 $na>b$。”这命题阿基米德是在他的名著《论球与柱》(On the Sphere and Cylinder)中提出来的。原来的说法是：如果两条线（或两个面、两个立体）不等，就可以在两者之差的上面加上它本身，一次一次加上去，使得每一个同类的量（线、面或体）都被超过。[1]

攸多克萨斯曾深入研究了“中末比”的问题：就是将已知线分为两部分，使其中一部分是全线段与另一部分的比例中项。中末比和正五边形作图有密切关系。这种作图法猜想毕达哥拉斯已经掌握，柏拉图把它作为一个线段可以分为两个不可通约量的例子。

到了中世纪，中末比被披上了神秘的外衣。巴巧利称之为“神圣比例”，并在1509年出版的《神圣比例》(De divina proportione)一书中论述它。刻卜勒称之为“神圣分割”(sectio divina)，达芬奇称之为“黄金分割”(sectio aurea, golden section)。这个名称一直沿用下来。

攸多克萨斯证明了一个极端重要的命题：“取去一量之半，再取去所余之半，这样继续下去，可使所余的量小于另一任给的小量。”这是近代极限论的前驱。

攸多克萨斯把原子法和穷竭法建立在较稳健的基础上。他

---

〔1〕T.L.Heath 校订阿基米德原著的英译本The Works of Archimedes with the Methd of Archimedes (1912) p.4. 另见T. L.Heath, A History of Greek Mathematics, vol. Ⅱ (1921) p.35.

用归谬法证明了德谟克利特提出的命题：圆锥、棱锥的体积是等底等高的圆柱、棱柱体积的1/3．证明步骤大致如下，设V是圆柱体积，C是圆锥体积．两者关系有三种可能：$V>3C$，$V<3C$，$V=3C$．前两者都导致不合理的结果，因此第三种情形成立．这就是我们熟知的穷举法．

将分析法和综合法对峙，大概也是攸多克萨斯所创．分析法是先假定所要证明的命题为真，由此推得一已知为真确的结论．综合法恰恰相反，是由已知推出所要证明的命题．

门内马斯（Menæchmus，Μέναιχμος，约公元前375—325年）是攸多克萨斯的学生，做过亚历山大王（Alexander the Great，公元前356—323年）的教师．关于他有一个流传很广的故事．亚历山大问门内马斯是不是可以为他把几何弄得简单一点，门内马斯回答说："在国家里有老百姓走的小路，也有为国王铺设的大道，但在几何里，道路只有一条！"这故事出自晚期的希腊作家斯托比亚斯（Stobæus，约500年），可以作为学习数学的箴言．类似的故事还有几个．据普罗克拉斯记载，托勒密（Ptolemy，Πτολεμαῖος，公元前367?—285年）王问欧几里得说，除了他的《几何原本》而外，有没有其他的捷径，欧几里得回答说："几何无王者之道！"[1]另一种说法认为这是塞尼卡（Seneca）和亚历山大王的故事．

门内马斯是系统研究圆锥曲线的第一人．过去希波克拉提斯把倍立方问题归结为在线段a和$2a$之间插入两个等比中项x,y的问题．门内马斯知道$a:x=x:y=y:2a$与$x^2=ay$和$2a^2=$

〔1〕李善兰、伟烈亚力汉译《几何原本》序（1857）："埃及国王多禄某问曰：'几何之法，更有捷径否？'（欧几里得）对曰：'夫几何一途，若大道然，王安得独辟一途也？'"

xy 相当，由此导致圆锥曲线的探讨。

他用平面去截三种直圆锥，令平面与母线垂直。如圆锥的顶角(母线所张的最大角度)是直角，截口是抛物线；顶角是锐角，截口是椭圆；顶角是钝角，截口是双曲线。[1]

柏拉图的学生亚里士多德是古代著名的学者，中世纪的人把他奉为圣人，其思想影响西方数千年之久。亚里士多德是形式逻辑的奠基者，他和老师一样，非常重视数学。他所给出的定义，也被传诵一时："点、线、面各是线、面、体的分界，而具有三维的是体。"

第三节 亚历山大前期

埃及的亚历山大城，是东西海陆交通的枢纽，又经过托勒密王的加意经营，逐渐成为新的希腊文化渊薮，希腊本土这时已退居次要地位。几何学最初萌芽于埃及，以后移植于爱奥尼亚，其次繁盛于意大利和雅典，渐具富丽之姿，最后又回到发源地，经过一番新的培植，达到了丰茂成林的境地。

亚历山大前期是指从公元前 4 世纪到公元前 146 年古希腊灭亡，罗马成为地中海区域的统治者为止。从这以后一直到公元 641 年阿拉伯人攻占亚历山大为止，称为亚历山大后期，前后绵续千年！

这两个时期的特点，是几何脱离了哲学而独立，从用实验和观察以建立起自己结果的经验科学，过渡为演绎的科学。从不多的几个原始命题(公理)开始，作为逻辑推论而得到所要的结论。而公理是在千万代实践的基础上得来的。这一时期另一个

〔1〕V.Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p. 282.

特点是高度的抽象化，希腊数学至此达到全盛时期.

（一）欧几里得

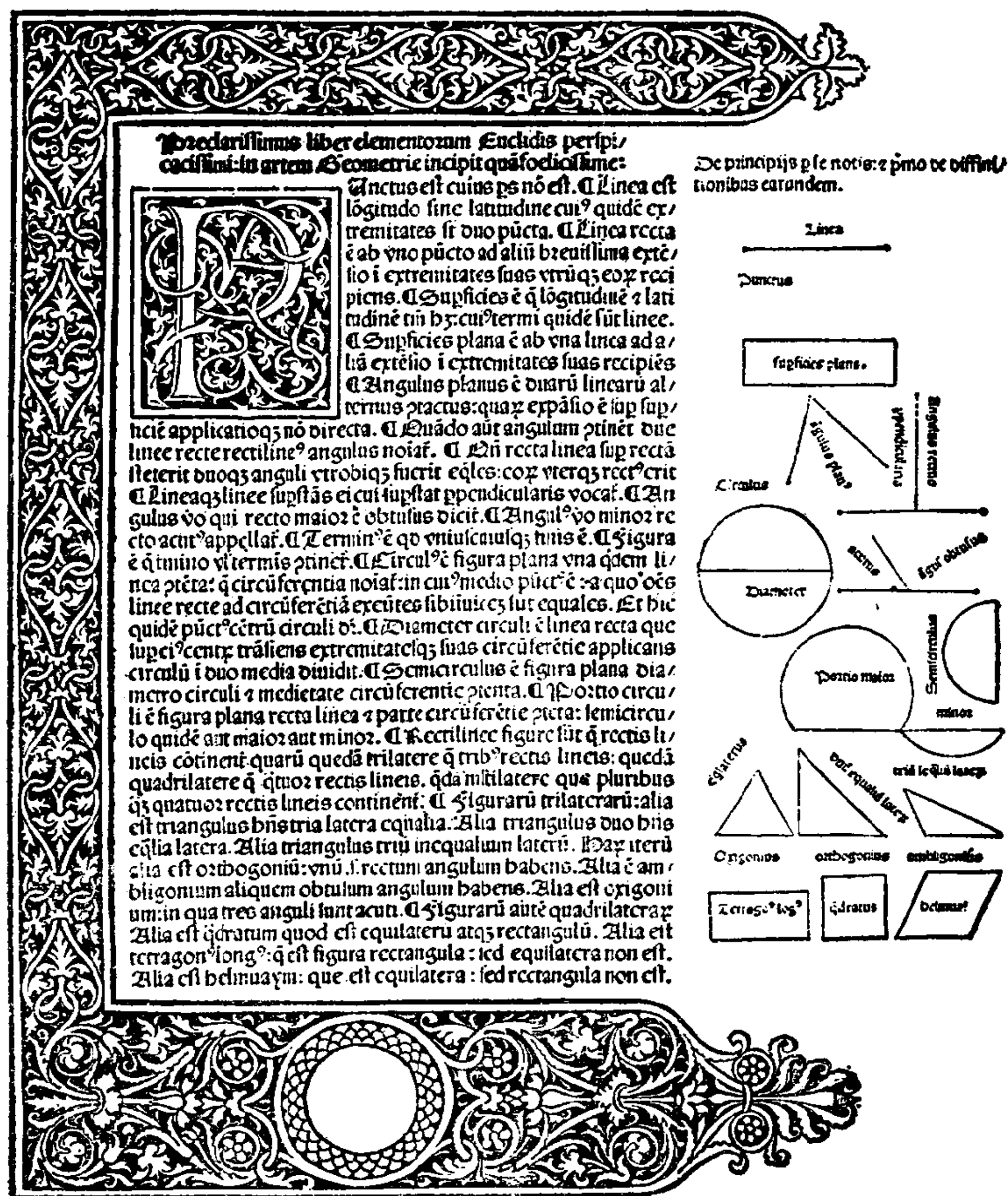
亚历山大前期第一个大数学家是欧几里得（Euclid, Εὐκλείδης，约公元前330—275年）．关于他的生平，现在知道的很少．猜想他早年在雅典受过教育，深知柏拉图的几何学．公元前 300 年左右，在托勒密王的邀请下，来到亚历山大教学．他是一个温良敦厚的教育家，对有志数学之士，总是循循善诱地教导，但反对在学习上不肯刻苦钻研，投机取巧的作风．欧几里得也反对急功近利的狭隘实用观点．斯托比亚斯记述一个故事，说有一个青年学生，才开始学第一个命题，就问欧几里得，他学了几何学之后将得到些什么．欧几里得说："给他三个钱币，因为他想在学习中获取实利．"[1]

欧几里得写过不少数学、物理的著作，而最重要的是他的巨著《几何原本》（Elements, Στοιχεῖα）．从来没有一本科学书籍，象《几何原本》那样巩固而长期地成为广大学生所传诵的读物．1482年到19世纪末，《几何原本》的印刷本竟用各种文字出了一千版以上．在这以前，它的手抄本统御几何学也已达一千八百年之久．欧几里得的影响是如此深远，以致欧几里得和"几何学"变成了同义语．

自从公元前 7 世纪以来，希腊几何集中了异常丰富的材料，简直令人眼花缭乱．问题于是提出，怎样把它整理在严密

〔1〕T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. Ⅰ (1921) p. 357.

的逻辑系统之中呢？这是一项艰巨的任务．公元前 5 世纪的希波克拉提斯、前 4 世纪的西底斯（Theudius，约公元前 360 年）等学者都做过这样的综合整理工作，但当欧几里得集大成的《几何原本》出现的时候，这些工作都湮没无闻了．


Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspi/
cacissimi: in artem Geometrie incipit quãfoelicissime:
Punctus est cuius ps nõ est. ¶ Linea est
lõgitudo sine latitudine cui⁹ quidẽ ex/
tremitates sũt duo pũcta. ¶ Linea recta
ẽ ab vno pũcto ad aliũ breuissima extẽ/
sio i extremitates suas vtrũqȝ eoꝝ reci
piens. ¶ Supficies ẽ q̃ lõgitudinẽ ⁊ lati
tudinẽ tm̃ hꝫ: cui⁹ termi quidẽ sũt linee.
¶ Supficies plana ẽ ab vna linea ad a/
liã extẽsio i extremitates suas recipiẽs
¶ Angulus planus ẽ duarũ linearũ al/
ternus ꝯtactus: quaꝝ expãsio ẽ sup sup/
ficiẽ applicatioqȝ nõ directa. ¶ Quãdo aũt angulum ꝯtinẽt due
linee recte rectiline⁹ angulus noiaꝛ. ¶ Qñ recta linea sup rectã
steterit duoqȝ anguli vtrobiqȝ fuerit eq̃les: eoꝝ vterqȝ rect⁹ erit
¶ Lineaqȝ linee supstãs ei cui supstat ppendicularis vocaꝛ. ¶ An
gulus vo qui recto maior ẽ obtusus dicit. ¶ Angul⁹ vo minor re
cto acut⁹ appellaꝛ. ¶ Termin⁹ ẽ qd vniuscuiusqȝ finis ẽ. ¶ Figura
ẽ q̃ tmino vl termis ꝯtineꝛ. ¶ Circul⁹ ẽ figura plana vna q̃dem li/
nea ꝯtẽta: q̃ circũferentia noiaꝛ: in cui⁹ medio pũct⁹ ẽ: a quo oẽs
linee recte ad circũferẽtiã exeũtes sibiinuicẽ sũt equales. Et hic
quidẽ pũct⁹ cẽtrũ circuli dr̃. ¶ Diameter circuli ẽ linea recta que
sup ei⁹ centꝝ trãsiens extremitatesqȝ suas circũferẽtie applicans
circulũ i duo media diuidit. ¶ Semicirculus ẽ figura plana dia/
metro circuli ⁊ medietate circũferentie ꝯtenta. ¶ Portio circu/
li ẽ figura plana recta linea ⁊ parte circũferẽtie ꝯtẽta: semicircu/
lo quidẽ aut maior aut minor. ¶ Rectilinee figure sũt q̃ rectis li/
neis cõtinent: quarũ quedã trilatere q̃ trib⁹ rectis lineis: quedã
quadrilatere q̃ q̃tuor rectis lineis. q̃da mltilatere que pluribus
q̃ȝ quatuor rectis lineis continẽt. ¶ Figurarũ trilaterarũ: alia
est triangulus hñs tria latera equalia. Alia triangulus duo hñs
eq̃lia latera. Alia triangulus triũ inequalium laterũ. Haꝝ iterũ
alia est orthogoniũ: vnũ s. rectum angulum habens. Alia ẽ am/
bligonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est oxigoni
um: in qua tres anguli sunt acuti. ¶ Figurarũ autẽ quadrilateraꝝ
Alia est q̃dratum quod est equilateru atqȝ rectangulũ. Alia est
tetragon⁹ long⁹: q̃ est figura rectangula: sed equilatera non est.
Alia est helmuaym: que est equilatera: sed rectangula non est.

De principijs p se notis: ⁊ pmo de diffinitionibus earundem.

图16　欧几里得《几何原本》印刷本（1482）第 1 页

《几何原本》的伟大历史意义在于它是用公理法建立起演绎的数学体系的最早典范.

我国最早的译本是1607年（明万历丁未年）利玛窦、徐光启合译的《几何原本》前6卷，[1]和1857年（清咸丰7年）伟烈亚力、李善兰合译的后9卷. 在这以前，元朝已有欧几里得《几何原本》的译本. 译名是《兀忽列的四擘算法段数十五部》.[2] 可惜没有传下来.

现在较流行的英译本是希思（Thomas L. Heath, 1861—1940，近代数学史家，以研究希腊数学著称）翻译注释的"The Thirteen Books of Euclid's Elements".[3]我们根据利玛窦、徐光启、伟烈亚力、李善兰的译本[4]，以及希思译本等简单介绍一下它的内容.

第Ⅰ卷之首，立"界说"（定义）36个.

如"第一界：点者，无分."（点是没有部分的）"无长短广狭厚薄.""第二界：线，有长无广."

此外还有面、平角、直角、锐角、圆、三角形、四边形、平行四边形等定义. 接着有"求作四则"（即公设，postulate）和"公论十九则". 公论就是公理（axiom）. 其中"第十一论"有的版本（如希思本）称为"第五公设". 就是后来引起许多纠纷的"欧几里得平行公设". 用现在的术语来说是："如果一直线和两直线相交，所构成的两个同侧内角之和

---

〔1〕见本章第一节p.90.

〔2〕这是阿拉伯文译本. 见马坚《元秘书监志"回回书籍"释义》，载《光明日报》（1955.7.7）. 又李俨《中国算学史》（1955）p.139.

〔3〕1908初版，1925二版，1956重印.

〔4〕1865年（清同治4年）夏金陵刻本.

图17　《几何原本》阿拉伯文译本1350年手抄本．这一页是勾股定理的证明

小于两直角，那么，把这两直线延长，它们一定在那两内角的一侧相交。”这命题不象其他公理那么显然，因此很快便产生这样的意见，认为欧几里得把这一命题放在公理之列，不是因为它不能证明，而是找不到证明。这一命题缺乏证明，是欧几里得体系的唯一“污点”。后人为这公理打了二千多年的笔墨官司，最后引出非欧几何。

在公设和公理之后，这一卷给出48个命题。包括三角形、垂直、平行、直线形的面积等关系。围绕着第5命题有许多趣事。

中世纪[1]欧洲在基督教神学和经院哲学的权威传统和教条的统治下，障碍了人们思想的自由发展。那时欧洲科学非常落后，在学校里完全忽视数学的学习。直到1336年，巴黎大学才定立一条规则，凡想取得学位的，非学数学不可。13世纪英国有名的学者培根(Roger Bacon，1214?—1294）的书中说，牛津大学的学生，能够细心钻研《欧几里得》（欧几里得《几何原本》的简称）卷Ⅰ第3、4命题以后各命题的寥寥无几，因此第5命题被称为“elefuga”，即“一群废物”（flight of the wretched)。这个命题后来又叫做“笨蛋的难关”(pons asinorum)[2]。在1591年克拉维斯校订的《欧几里得》里说，初

〔1〕中世纪（Middle Ages）通常从公元476年西罗马灭亡算起，直到欧洲的文艺复兴时期为止。准确的年份有几种说法：1. 结束于1453年土耳其人攻陷君士坦丁堡；2. 结束于1492年哥伦布发现美洲；3. 结束于1640年欧洲资本主义兴起。

〔2〕直译为“驴桥”，英文里叫asses' bridge，法文 le pont aux ânes，德文 Eselsbrücke. 恩格斯《反杜林论》（Anti-Dühring）(1959) p.65（译本1971，p.52）引用了“驴桥”这一典故。

学者觉得这定理的线和角很多，一时不能领悟[1]。由此可见当时大学生几何知识的贫乏。

我们来看一看“驴桥”究竟是怎么一回事。

卷Ⅰ的前5个命题是：

1．求在已知线段上作一等边三角形。

2．求以已知点为端点，作一线段与已知线段相等。

3．已知大小二线段，求在大线段上截取一线段与小线段相等。

4．两三角形两边与夹角对应相等，则这两三角形全等。

5．（驴桥）等腰三角形两底角必相等，两底角的外角也相等。

第5个命题普通是用引顶角的平分线来证明的。不过《欧几里得》中作角平分线是第9命题，这时还未学到。所以只能用前面4个命题。方法是延长AB至B'，AC至C'使$AB'=AC'$，联BC'，$B'C$。由此就不难推出命题的结论（图18）。

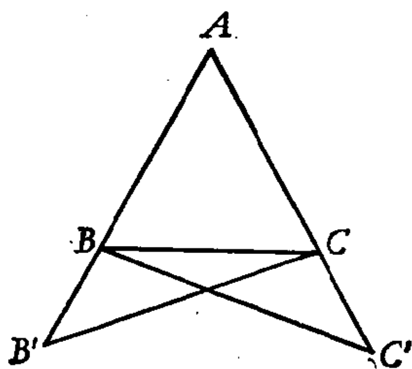


图　18

详细写起来是一大片，难怪学生有“驴桥在此，愚者莫过”之叹了。

第Ⅱ卷、论面积的变换，用几何的语言叙述代数的恒等式。如$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，a^2理解为以a为边的正方形面

[1] F. Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.137.

积，ab理解为矩形面积等等．第11命题是有名的"黄金分割"．

第Ⅲ卷讨论圆、弦、切线以及与圆有关的图形．

第Ⅳ卷讨论多边形与圆，正多边形的作图法，包括正五边形、六边形、十边形等．

第Ⅴ卷是比例论．

第Ⅵ卷将比例论用于相似形的研究．

第Ⅶ卷是算术（数论）．

第1命题"两不等数，辗转相减，余一而止，则为两无等数之数[1]"就是欧几里得辗转相除法（Euclid's algorithm）的出处．

第2命题"两数非无等数，求其最大等数"是用辗转相除法求最大公约数．

第38命题（希思本是39题）"有三数，求其所度最小数"即求最小公倍数法．

第Ⅷ卷讲连比例．

第Ⅸ卷也是数论．第20命题："任置若干数根（素数），数根必不尽于此．"就是现在数论中的欧几里得定理：素数的个数无穷多．

第Ⅹ卷主要讲不可通约量的理论．

第117命题（希思本无此题）："凡正方形之边，与对角线无等（不可通约）．"我们现在常常用作不可通约量的例子．

第Ⅺ卷是立体几何．

第Ⅻ卷利用"穷竭法"证明圆面积的比等于半径平方的比，

---

〔1〕徐、利译本"无等数之数"指互素的数．

球体积的比等于半径立方的比。及“任何棱锥体，俱为同底等高平行棱体（棱柱体）三分之一”等。

第XII卷主要讨论正多面体。

第XIV，XV卷是后人补上去的。一般认为XIV卷出自亚历山大的依普西克（Hypsicles，Ὑψικλῆς，约公元前180年）的手笔。XV卷是6世纪初叙利亚人大马萨斯（Damascius，Δαμάσκιος）所著。[1]

（二）阿基米德

亚历山大学派第二个大数学家是阿基米德（Archimedes，Ἀρχιμήδης），公元前287年生于意大利半岛南端西西里岛的叙拉古（Syracuse），公元前212年卒于同地[2]。他早年在亚历山大学习，以后和亚历山大的学者保持密切联系，因此他算是亚历山大学派的成员。

后人对阿基米德给以极高的评价。近代数学史家倍尔（Eric Temple Bell，1883—1960）说：任何一张列出有史以来三个最伟大的数学家的名单中，必定会包括阿基米德，另外两个通常是牛顿和高斯。不过以他们的丰功伟绩和所处的时代背景来对比，拿他们影响当代和后世的深邃久远来比较，还应首推阿基米德。[3] 普利尼（Pliny，23—79）[4] 甚至称阿基米德为

〔1〕D.E.Smith，History of Mathematics（1923）pp.119，182.

〔2〕传记见 C. C. Gillispie，Dictionary of Scientific Biography，vol.I（1970）pp. 213—231.

〔3〕E.T. Bell，Men of Mathematics（1937）p.20.

〔4〕罗马时代的科学史家，著有37卷《自然史》（Historia Naturalis）.



阿基米德(Archimedes)

"数学的神". 这些过分的赞扬，反映了后人对阿基米德的崇敬.

普鲁塔克的《马塞拉斯传》[1]里记载，阿基米德说任何重物都可以移动. 并发出豪言壮语："如果有另一个地球作为立足点，我就可以移动这个地球！"[2]

波利俄 (Marcus Vitruvius Pollio) 是罗马时代著名的建筑学家，在他的《建筑学》(De Architectura Libri X，作于公元前20—14年之间) 中记述了一个后来被人们传诵了两千年的轶事. 有一次叙拉古的亥厄洛王叫金匠造一个纯金的皇冠，做成后国王怀疑那里面掺有银子. 便请素称多能的阿基米德来鉴定一下. 阿基米德也一时想不出好办法来. 正在苦闷之

〔1〕马塞拉斯 (Marcus Claudius Marcellus, 公元前 268? —208年)是罗马大将，率兵攻打叙拉古.

〔2〕T.L. Heath, The Works of Archimedes with the Method of Archimedes, Introduction (1912) p. 19. 阿基米德并不知道地球有多重，现在知道地球质量是 6×10^{27} 克. 假想用杠杆来举起地球，加60公斤 (6×10^{4} 克) 的力，那么力臂应是重臂的10^{23}倍. 要举起地球1毫米，力臂的一端应走过10^{23}mm $=10^{17}$公里. 这个距离超过 10000 光年！换句话说，阿基米德用毕生的力量，也休想移动地球分毫. "这位伟大的古代力学家，如果知道地球是如何巨大，他大概会节制自己的傲慢口吻吧". 见 Я.И.Перельман《趣味物理学》，崔尚辛译，(1950)，

际，他到公共浴室去洗澡，当浸入装满水的浴盆去的时候，水漫溢到盆外，而身体重量顿觉减轻。于是忽然想到不同质料的东西，虽然重量相同，但因体积不同，排去的水必不相等。根据这一道理，不仅可以判断王冠是否掺有杂质，而且知道偷去黄金的份量。这一发现非同小可，它象闪电一般通过脑际，阿基米德高兴得跳了起来，飞奔到家中准备试验，口中大呼“由力卡！由力卡！”（Eureka，希腊语 εὕρηκα[1]，意思是“我找到了”）[2] 经过仔细的实验，他终于发现了流体静力学的基本原理：“阿基米德原理”——物体在液体中减轻的重量，等于排去液体的重量．后来总结在他的名著《论浮体》（On Floating Bodies）中。[3]

---

〔1〕 εὕρηκα 是 εὑρίσκειν（发现，寻找）的完成陈述式。后者就是英文 heuristic（法文heuristique，德 Heuristik，俄 эвристика）的字源。通常译作“启发式”，指靠自己（而不是依赖别人灌注）发现真理的方法。

〔2〕 设王冠重W，其中金与银分别重 w_1，w_2，$W=w_1+w_2$。分别取重W与 w_1 的纯金放入水中，设排去水的重各为 F_1 与x，则 $W:w_1=F_1:x$，即 $x=\frac{F_1w_1}{W}$。同样，分别取重为W与 w_2 的银放入水中，设排去水的重各为 F_2 与y，于是 $y=\frac{F_2w_2}{W}$。现将王冠放入水中，设排去水的重为F，则 $F=\frac{F_1w_1}{W}+\frac{F_2w_2}{W}$，由此得 $F(w_1+w_2)=F_1w_1+F_2w_2$，即 $\frac{w_1}{w_2}=\frac{F_2-F}{F-F_1}$。根据实验求出 F_1，F_2，F，即可算出金与银的比值。见 T. Heath A History of Greek Mathematics, vol. Ⅰ, (1921) p.93.

〔3〕 见T.L. Heath注释英译本 The Works of Archimedes (1897) pp. 254—300.

第二次布匿战争[1]时期，叙拉古和迦太基缔结同盟，因此成为罗马的仇敌．马塞拉斯率领罗马大军围攻叙拉古．在这危急存亡之秋，阿基米德便献出自己一切杰出的科学技术为祖国效劳．传说他用起重机抓起敌人的船只，高举起来，摔得粉碎．用新发明的奇妙机器，射出大石锥枪，如同暴雨，使罗马军心胆俱裂．有的希腊文献记载，当罗马兵船靠近城下，阿基米德用巨大火镜反射日光使兵船焚烧．[2]另一种说法是他用投火器，将燃烧着的东西弹出去烧敌人的船．这些传说除了投石器、投火器较为可信之外，其余的大多是夸张的说法．无论如何，阿基米德为了挽救自己的祖国，曾竭尽自己的心智，给敌人以沉重的打击，这是无可怀疑的事实．就这样顽抗了敌人的进攻，终于因粮食耗尽而陷落，阿基米德也光荣牺牲了．

罗马兵入城时，统帅马塞拉斯出于敬佩阿基米德的才能，下命令不准伤害这位贤者．而阿基米德似乎并不知道城池已破，又重新沉迷在数学的深思之中．一个罗马兵突然出现在他面前，命令他到马塞拉斯那里去，遭到阿基米德的严词拒绝．这样，他就不幸死在这个士兵的刀剑之下（这故事出自普鲁塔克的记载）．另一种说法是罗马兵闯入阿基米德的住宅，看见一位老人在地上埋头作几何图形（还有一说是他在沙滩上

---

〔1〕迦太基（Carthage）是古代腓尼基人建立的国家．以现今非洲北部的突尼斯（Tunis）为中心，领土东到西西里岛，西达西班牙和摩洛哥．由于商业和殖民利害的冲突，从公元前264年起到前146年为止，前后三次和罗马人进行了猛烈的大搏斗，延续120年之久．罗马人称迦太基人为布匿（Punic），故史称布匿战争．

〔2〕参考（1）С．Я．鲁里也《阿基米德小传》，赵孟养译，载《数学通报》（1957.1）．（2）梁锡智《阿基米德》（1963）．（3）E.T.Bell, Men of Mathematics（1937）．

画图），士兵将图踩坏，阿基米德怒斥士兵："不要弄坏我的圆！"士兵拔出短剑，这位旷世绝伦的大科学家，竟丧在愚蠢无知的罗马兵手中！后说颇为流行[1]，但以阿基米德的爱国热忱与智慧机警，似乎前说更为可信。

阿基米德的死，马塞拉斯颇感悲痛。除了将这士兵当作杀人犯处理外，并为阿基米德立墓，聊表景仰之忱。在碑上刻着球内切于圆柱的图形，以资纪念。因阿基米德曾发现球的体积及表面积，都是外切圆柱体体积及表面积的2/3。

后来事过境迁，叙拉古人竟不知保护这不平凡的纪念物。当西塞罗（Marcus Tullius Cicero，公元前106—43年，罗马政治家、哲学家）游历叙拉古时，见这寂寂孤坟，已掩埋在垃圾之中。[2]

阿基米德虽然长久住在叙拉古，但他是亚历山大学派的群雄之一。他在天文、力学、数学获得高度的成就，主要原因之一是他正确地注意到理论与实际间的联系。他常常在实践中洞察到事物的本质，然后通过严格的论证，使经验的事实上升为系统的理论。例如通过自身的沐浴发现了浮体定律，应用杠杆的原理去计算抛物弓形的面积等。

阿基米德求得$\sum_{k=1}^{n} k^2$的值。这是首次系统地处理高阶等差数列的例子。又用圆锥曲线方法解决相当于

---

〔1〕（1）吉松虎畅《科学界的伟人》张建华译。（2）G. Wilson《科学家奋斗史话》曾宝葹译，（1950）p.75. （3）小坂正行《世界数学史》，（1955）p.117.等等。

〔2〕F. Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.75.

$$x^3 \mp ax^2 \pm b^2c = 0$$

的三次方程。

阿基米德向亚历山大的数学家提出过一个“群牛问题”。实质上要从7个方程解出8个正整数的未知数，最后归结为一个二次不定方程[1]

$$x^2 - 4729494y^2 = 1,$$

它的解数字大得惊人，位数要超过20万！[2]

在《圆的量度》（Measurement of a Circle）一文中，阿基米德利用外切与内接96边形求得圆周率 π：

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

这是第一次在科学中提供了误差的估计以及所得结果精确度的确定。

阿基米德还研究了著名的“阿基米德螺线($\rho = a\theta$)”，发现13种半正多面体（各面都是正多边形，但并非全属一类），创三分角法和三分角器械等。

在古代没有第二个学者象阿基米德那样成功地将数学应用到力学方面去。他的杰作螺旋扬水器，杠杆理论和天文方面测量太阳视直径的仪器等也很出名，可惜大多失传。

1906年，海堡（J.L. Heiberg）在君士坦丁堡[3]发现阿基米

[1] 费马(Pierre de Fermat)对 $x^2 - Ay^2 = 1$ 型的不定方程颇有研究。欧拉(L. Euler)不正确地把这类方程称为“佩尔（John Pell, 1611—1685，英国数学家）方程”，这名称为后人所沿用。Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) pp.278, 610.

[2] T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I (1921) p.98.

[3] Constantinople，现称伊斯坦布尔(Istanbul)，土耳其最大城市。

德写给厄拉托塞(Eratosthenes,'Ερατοσθένης,约公元前274—194年)的信以及阿基米德其他著作的传抄本，大大丰富了研究阿基米德的资料．在这信中看到阿基米德独特的根据力学的原理去发现问题的方法．以后以《阿基米德方法》(The Method of Archimedes)为名整理成书．[1]

阿基米德把一块面积或体积看成有重量的东西，分成许多非常小的长条或薄片，然后用已知面积去平衡这些“元素”，找到了重心和支点，所求的面积或体积就可以用杠杆定律计算出来了．他把这种方法看作发现问题的方法，但仍嫌不够严密，得到结果以后，还要用归谬法证明它．他用这种方法得到抛物弓形的面积，球和球冠面积，螺线下面积，旋转双曲体体积等辉煌的成果．阿基米德的方法，业已伸展到17世纪中叶无穷小分析的领域里去了！这预示着新的时代——变量数学时期的来临！

历史上有的数学家长于开辟新的园地，而缺少致密的推理；有些数学家则注重严格的逻辑证明，而对新领域的开拓却裹足不前．阿基米德兼有二者之长，他以惊人的独创性，将熟练的计算技巧和严格的证明溶为一体．阿基米德更善于将抽象的理论和工程技术的具体应用紧密地结合起来．这位独步一时的大科学家，在计算中有时也出错．但他对待工作非常认真，当他发现自己关于球缺、球冠的论断有错时，就在另一本书《论螺线》(On Spirals)的序言[2]中详细地指出来，使读者注意．并以此作为不给出严格证明就可能出错的前车之鉴．

---

〔1〕T.L. Heath 校订英译本 The Works of Archimedes with the Method of Archimedes (1912).

〔2〕这是写给多西提(Dositheus)的一封信．

阿基米德除了留给后人许多学术遗产之外，这种一丝不苟的对待科学的态度也是值得我们学习的。

（三）阿波罗尼斯

别迦（Perga，小亚细亚南岸）的阿波罗尼斯（Apollonius, Ἀπολλώνιος，约公元前260—170年）常与欧几里得、阿基米德合称亚历山大前期的三大家。他学于亚历山大，后来并在那里教学。

阿波罗尼斯的巨著《圆锥曲线论》（Conics）将圆锥曲线的性质网罗殆尽，几乎使后人没有插足的余地。在这部著作中希腊数学达到炉火纯青的境地。不过如果没有欧几里得的前驱工作，阿波罗尼斯是不可能攀登上他的顶点的。亚历山大学派影响着几何学两千余年，直到17世纪的帕斯卡、笛卡儿才开始有本质上的改变。

《圆锥曲线论》共8卷，前4卷的希腊文本和其次3卷的阿拉伯文本保存了下来，最后一卷遗失。这书不但集前人的大成，而且发现很多新的性质。他推广了门内马斯的方法，证明三种圆锥曲线都可以由同一个圆锥体截取而得。截取时并用两个圆锥，取双曲线的两支，这和前人的方法有所不同。给出“抛物线”（παραβολή, parabola），[1]“椭圆”（ἔλλειψις, ellipse，原意是“不足的”），“双曲线”（ὑπερβολή,

[1] 希腊文原意是“放在旁边”，指截圆锥体时，抛物线的对称轴和圆锥母线平行。和“平行”（parallel）希腊文 παράλληλο；前四个字母相同，παρά是“旁边”，ἀλλήλων 是“相互”。

hyperbola，原意是“过剩的”）及“正焦弦”（ὀρθία πλευρά, latus rectum）等名称。

他比较了三种锥线的异同，若用现代的术语和符号来表达，可将直角坐标系的原点放在锥线的顶点上，使对称轴与OX轴重合，则锥线方程是

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

阿波罗尼斯证明 $q<0$ （不足）时是椭圆； $q>0$ （过剩）时是双曲线， $q=0$ 时是抛物线。[1]

坐标制的思想，在阿波罗尼斯的书中已见端倪。他采用过一种“坐标”，圆锥体底面直径作为横坐标，过顶点的垂线作为纵坐标。现代“坐标”（coordinate）的用语，却是莱布尼兹首先创用的。

第四节　亚历山大后期

公元前146年罗马灭亡了希腊，逐步统一了地中海一带。这时亚历山大的学者，仍能继承前期的成就，不断有所发明创造。这个时期叫做亚历山大后期。

这个时期的学者在许多领域内作出了重大的成绩。至于几何学，似乎欧几里得《几何原本》已经完成了主要的创建任务，剩下来的只是增添修补的工作了。事实上，直到17世纪以前，欧几里得体系没有发生过本质的变化。

〔1〕中村幸四郎《数学史》（1956）p.57。

海伦（Heron，'Ηρων，约公元50年）[1]是有名的测量学家和机械学家。他所著的《测量仪器》（On the Dioptra，Περὶ διόπτρας）描述一种名叫“dioptra，δίοπτρα”的测量工具，类似现代的经纬仪，用作测量及天文观测。他特别指出可以测量可望而不可即物体的高和距离。在这里看到著名的“海伦公式”：$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（△是三角形面积，$a$，$b$，$c$ 是三边，s 是半周长）。这公式也载在他的《度量论》（Metrica，Μετρικά）中。实际上根据阿拉伯文的文献，阿基米德已经知道这个公式。[2]这公式和我国大数学家秦九韶《数书九章》（1247）卷5《田域类》第2题“三斜求积”所用的公式本质上相同。

梅内劳斯（Menelaus，Μενέλαος，约公元100年）曾著《球面论》（Sphaerica），着重讨论球面三角形的几何性质。以他为名的“梅内劳斯定理”现载在初等几何和射影几何的教科书中。他还把这定理推广用于球面几何。此书并讨论了球面上过一点的四个大圆的非调和（anharmonic）性质等。

巴普士（Pappus，Πάππος，约公元300年）是晚期的亚历山大数学家。他搜集古来希腊各名家的著作，写成8大卷的《数学汇编》（Mathematical Collections，Μαθηματικῶν συναγωγῶν βιβλία）。其中包括巴普士自己的创作。可惜只有后6卷存下来。值得注意的是这书已经讨论了“平面图形绕一轴旋转所产生立体的体积”，这在后来叫做“古尔丁定理”，

〔1〕海伦的生年很不确定。各家意见有几百年的出入。最早的估计是公元前3世纪，最晚是公元3世纪（Heath）。见 D. E. Smith, History of Mathematics, vol. I (1923) p.125.

〔2〕T. Heath, A History of Greek Mathematics (1921) p.322.

因为后者曾重新加以研究.

许多古代的著作由于巴普士的保存，才为后世所知. 如塞诺多拉（Zenodorus, Ζηνόδωρος, 约公元 180 年）的《等周论》（Isoperimetry）的14个命题，被编入《数学汇编》的第 5 卷中. 其中有“圆面积大于任何同周长的正多边形的面积”、“表面积相同的立体中，以球的体积最大”等著名命题.

在巴普士的著作中出现了属于射影几何的概念，如对合（involution）、非调和比（anharmonic ratio,即交比）等. 他还证明了圆锥曲线内接六边形的“帕斯卡定理”的特殊情形[1]. 给后世（17世纪）射影几何的研究提供了线索.

巴普士在书的第 5 卷中还研究了一个有趣的问题：蜜蜂的智慧. 他证明了蜜蜂六棱柱的巢是一种最经济的形状，在其他条件相同的情况下，这种形状容积最大. 这问题在18世纪得到了进一步的研究.[2]

海帕西娅（Hypatia, Ὑπατία, 约370—415年卒于亚历山大）是历史上第一个杰出的女数学家. 她的父亲西翁（Theon, Θέων, 约390年）深通数学、天文，曾校订欧几里得与托勒密的著作. 海帕西娅的学识更胜过她的父亲，注释过丢番图的代数学及阿波罗尼斯的《圆锥曲线论》，可惜均已遗失. 她不幸于 415 年在亚历山大被残暴的基督教僧侣杀害.

公元 325 年，罗马帝国的君士坦丁大帝（Constantine Ⅰ, 280?—337）开始利用宗教作为统治的工具. 以后基督教会成

---

〔1〕T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. Ⅱ (1921) p.405. Н.Ф. Четверухин《射影几何学》（Проективная геометрия）孙福元等译，（1955）《历史简述》.

〔2〕见本书第四编六. p.500.

为欧洲封建社会的主要支柱，把哲学、政治、法学等等都置于基督教神学的控制之下．他们仇视学术，对进步科学家进行残酷的迫害．

海帕西娅是一位科学家，精通数学、医学、哲学．教会感到她的雄辩才能和崇高的声望足以威胁到他们的存在[1]，于是把她视为眼中钉．公元415年3月的一天，在教长西里耳（Patriach Cyril，376—444）的主谋下[2]，一群暴徒突然把她从马车上拉到教堂里残酷地杀死．这是历史上一桩骇人听闻的宗教迫害科学家的滔天罪行．

早在公元390年（一说399年大火），在德奥菲罗斯主教（Bishop Theophilus）的指使下，亚历山大图书馆的极大部分被放火烧毁．641年，亚历山大被阿拉伯人攻陷．图书馆是否遭到阿拉伯人的有意破坏，已不得而知[3]．总而言之，亚历山大的数学至此告一段落．

以后君士坦丁堡成为新的文化中心．但亚历山大时代的热情似乎已经消失了．他们没有亚历山大那种滂沛的创作气魄，主要的工作只是抄写和诠释古时的著作．虽然如此，他们还是有很大的功劳，就是把科学保存下来，并传给欧洲人．1453年，土耳其人攻占君士坦丁堡，把它劫掠一空．学者们带了许多珍贵的文献到意大利去避难，这和意大利的文艺复兴有密切的关系．

---

〔1〕T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. Ⅰ (1921) p. 528.

〔2〕〔3〕William Cecil Dampier (1867—1952) 《科学史及其与哲学和宗教的关系》(A History of Science and its Relations with Philosophy and Religion) 李珩译，(1975) pp.115,90,91.

René Taton, Histoire du Calcul, 小堀宪译《算法の历史》(1951) p.19.

第六章 代 数 学

第一节 引 言

“代数学”这个名称，在我国是1859年正式开始使用的。

1847年，英国人伟烈亚力来到上海，学习中国语文。他用中文写了一本《数学启蒙》（1853），介绍西方的数学。在序中说：“有代数、微分诸书在，余将续梓之。”这是第一次使用代数这个词来作为数学分科的名称。

李善兰是我国清代的数学家。1859年和伟烈亚力合译英国棣么甘(Augustus De Morgan，1806—1871）的“Elements of Algebra”（1835)，正式定名为《代数学》。这是我国第一本代数学书，代数的名称就是这样来的。

后来华蘅芳和英国人傅兰雅合译英国华里司《代数术》（1873）。卷首有“代数之法，无论何数，皆可任以何记号代之。……”说明所谓代数，就是用符号来代表数字的一种方法。[1]

---

〔1〕参考林鹤一《几何ト代數ト ノ语源ニ就テ》，载《和算研究集錄》下（1937）p.399.

在这以前，曾有许多不同的译名。17世纪末18世纪初有一本不题作者的《阿尔热巴拉新法二卷》.[1] “阿尔热巴拉”是Algebra 的音译. 1845年（清道光25年）俄国赠送给我国的图书中有《阿喀勒布拉数书》，“阿喀勒布拉”是алгебра 的音译. 还有译作“阿尔朱巴尔”，“阿尔热八达”的.[2] 更早的《数理精蕴》（1723）卷31—36是“借根方比例”，内容就是当时西方输入我国的代数学. 代数学过去曾叫做“借根方”或“东来法”.

“代数学”一词，来自拉丁文 algebra，它又是从阿拉伯文变来的. 其中有一段曲折的历史.

7世纪初，穆罕默德(Mohammed，570?—632）始创伊斯兰教，并迅速传播开去，成为团结阿拉伯人的一种力量. 他的继承者实现了阿拉伯的统一，以后向外扩张，建立横跨欧、亚、非三洲的大帝国. 公元750年时的疆界东到印度河流域，西面沿北部非洲直到西班牙. 我国史书上称为大食国.

大食国善于吸收被征服国家的文化. 他们精通希腊、波斯和印度的学术，把重要的书籍译成阿拉伯文. 并设立许多学校、图书馆和观象台.

这个时期出现了许多数学家，最著名的是9世纪的阿尔·花拉子模(Mohammed ibn Mûsâ Al-Khowârizmî，Мухамм-мед-бен-Мусса ал-Хорезми)，他的名字的原意是“花拉子模人摩西之子穆罕默德”简称阿尔·花拉子模. 花拉子模是地

〔1〕杰《代数的译名来源》，载《数学通报》（1960.4）p.40.

〔2〕李俨《中国数学大纲》（1958）p.418.

名，在今苏联乌兹别克境内的黑瓦（Хива）[1] 城附近。

阿尔·花拉子模是公元780—850年时人。820年左右，著了一本《代数学》。1140年左右罗伯特（Robert of Chester）把它译成拉丁文。书名是"'ilm al-jabr wa'l muquabalah"。aljabr 是"还原"或"移项"（将负项移到方程另一端，变成正项）的意思。wa'l muquabalah 是"对消"，即将两端相同的项消去或合并同类项。全名是"还原与对消的科学"，也可以译成"方程的科学"。后来第二个字渐渐被人忘记，而 aljabr 这个字变成了algebra，这就是拉丁文的"代数学"。

欧洲的中世纪从5世纪开始到文艺复兴前夕，在基督教神学和中世纪经院的权威传统和教条的统治下，障碍了人们思想的自由发展。那时欧洲的科学技术停滞不前，生产墨守成规。数学水平很难说已经超过公元前6世纪的埃及。阿尔·花拉子模的《代数学》传入欧洲，无疑产生巨大的影响。这本书讨论方程的解法。一次、二次方程的几种特殊解法，虽早已为人所通晓，但二次方程的一般解法却第一次在《代数学》中见到。希腊的丢番图只承认二次方程的一个正根。阿尔·花拉子模承认二次方程的两个根，还容许无理根的存在，[2] 不过还未认识虚根。他引入移项和对消的方法，也是印度人所不知道的。因此它不是抄袭希腊或印度人的著作，有他自己的独创性。

这本书把未知数叫做"根"（jidr），是树根、基础或事物根本的意思。后来译成拉丁文 radix。这个字有双重意义，它可以指一个方程的解，又可以指一个数的方根。一直沿用到现

---

〔1〕在乌兹别克与土库曼交界处，阿姆河（Аму-дарья）西岸。

〔2〕F.Cajori, A History of Elementary Mathematics(1916) p.108.

在.

阿尔·花拉子模《代数学》有一个重大的缺点，就是完全没有代数符号。一切算法都用文字语言来表达。例如把“$x^2+10x=39$”说成“一个平方数及其根的十倍等于三十九”。如果说用符号或文字代表数是代数学的一个基本特征的话，那么这本书很难说是一本真正的代数学。至少它和我们现在所理解的代数学有很大的距离。

阿尔·花拉子模另有一本《算术》书，译成拉丁文是“Algoritmi de numero Indorum”。第一个字是作者的名字。Al-Khowârizmî 本来就是阿拉伯文的音译，所以有多种拼法。这个字传抄变成algoritmi，又变成algorithm。以后成为数学中的专有名词，汉语译成“算法”，是指解决某些问题的特定计算步骤。电子计算机出现以后，有多种算法语言创造出来。较常用的有Algol 型语言。Algol 就是Algorithmic（算法的）和language（语言）的缩写。

第二节 方 程

一提起代数，自然会想到方程。长久以来，代数确实被理解为关于方程的科学，至少19世纪以前是这样。它的发展是和方程分不开的。代数和算术的主要区别，就在于前者引入未知量，根据问题的条件列出方程，然后解方程求出未知量的值。[1]

---

〔1〕《代数·代数函数·矩阵·同构·群》邓应生译，(1959)。载《苏联大百科全书选译》。

用符号来代替文字的叙述，也是代数特征之一。内塞尔曼甚至根据使用符号的多寡来作代数学分类或代数发展分期的标准。他把代数分为三类：（1）文词代数；（2）简字代数；（3）符号代数。[1]

（一）符号的使用

使用符号，是数学史上的一件大事。一套合适的符号，决不仅仅是起速记、节省时间的作用。它能够精确、深刻地表达某种概念、方法和逻辑关系。一个较复杂的公式，如果不用符号而用日常语言来叙述，往往十分冗长而且含混不清。

列举出历代各国关于方程的具有代表性的写法是很有趣的，从中可以看到一种符号的普遍采用是多么困难，它是在悠久的岁月中经过不断改良、选择和淘汰的结果。

（1）在三千六百年以前的莱因特纸草书上，阿默士写下一串符号：[2]



相当于一次方程

$$x\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\right)=37.$$

〔1〕见本书第十五章第四节。p. 388.

〔2〕F.Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.23.

（2）一千七百多年前希腊丢番图的符号[1]

$$K^{Y}\bar{\alpha}\Delta^{Y}\overline{\iota\gamma}s\bar{\varepsilon}\mathring{M}\bar{\beta}$$

相当于 x^3+13x^2+5x+2.

（3）15世纪阿尔·卡拉萨第(al-Qalasâdî, 1412—1486)[2]的符号

相当于 $4x^2+48=32x$. [3]

那时已开始使用印度—阿拉伯数码，但形状和现在还有很大的区别。注意式子是从右向左（阿拉伯文的习惯）读的。

（4）在卡当的《大术》（Ars Magra, 1545）中，

1. quad. quad. p̃. 32. quad. p̃. 256. æqualia 48. pos. p̃.240.

相当于 $1x^4+32x^2+256=48x+240$.

（5）韦达（François Viète[4], 1540—1603）对数学符号作了很多改进。他曾用

A cubus + B plano 3 in A, aequari Z solido 2.

表示 $x^3+3B^2x=2Z^3$.

又用 1C + 30Q + 40N, æquatur 1560

表示 $x^3+30x^2+40x=1560$. [5]

---

〔1〕F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1928) p.73.

〔2〕西班牙南部格拉纳达(Granada)附近巴扎(Baza)地方的人.

〔3〕F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1928) p.94.

〔4〕也拼作Francis Vieta.

〔5〕F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1928) pp. 186, 156, 201.

（6） 斯提文是十进小数的发明者之一。他在《算术》(L'arithmétique, 1585)一书中用

1③sera egale à − 2② + 12① + 48

表示 $x^3 = -2x^2 + 12x + 48$。[1]

（7） 哈里奥特(Thomas Harriot, 1560—1621)

用 52═══ − 3·a + aaa

表示 $52 = -3a + a^3$。

他已开始用等号，但写得特别长。未知数用a 表示。[2]

（8） 笛卡儿的《几何学》（1637）用

x^3 −− 9xx + 26x −− 24 ∞ 0

表示 $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$。[3]

笛卡儿是第一个提倡用x，y，z 代表未知数的。上面的式子中减号印成两横，可能是印刷时排版的关系。除了等号和 x^2 写成 xx 之外，已经和现在的写法基本一致。

从阿默士到笛卡儿，中间经过三千多年的变化，才形成了现代的符号。

"方程"一词，拉丁文 aequatio，英文 equation，法文 équation，德文Gleichung，俄文 уравнение，都有相等的意思。方程可以粗略地了解为含有未知量的等式。我国清初译 equation 为相等式，[4]是有一定根据的。确定用"方程"，是近30年的事。

阿尔·花拉子模引入"移项、对消"的算法之后，方程的

〔1〕、〔2〕 F.Cajori, A History of Mathematical Notations, vol.I (1928) pp.186,156,201.

〔3〕 见原本p.372，英译本p.159.

〔4〕 见本书第十四章第六节. p.357.

概念才逐渐明确起来，但是数学家解决许多属于方程的问题，却是很早的事。

一元一次方程的问题在埃及的纸草书中已经出现。巴比伦人可能知道某种特殊的二、三次方程的解法。已在前面提到，[1]不再复述。

（二）希腊时代

到了希腊时代，代数学获得重大的发展。代表的人物是丢番图(Diophantus, Διόφαντος, 约公元246—330年），被誉为代数学的鼻祖。他的生平事迹没有记载下来。有一本大约是4世纪时候的希腊诗文选集上有一首短诗（一说是墓志铭）用谜语的形式叙述了他的生平：

"丢番图的一生，幼年占$\frac{1}{6}$，青少年占$\frac{1}{12}$，[2]又过了$\frac{1}{7}$才结婚，5年之后生子，子先父4年而卒，寿为其父之半。"[3]

列出方程

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x,$$

可知　$x=84$岁。

一个（或一组）整系数的不定方程，如果只要求它的整数

---

[1] 见本书第二章第二节.pp.31—32.

[2] 原文是又过了$\frac{1}{12}$才长胡子.

[3] T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I (1921) p. 448.

解，这不定方程习惯上叫做“丢番图方程”，因为丢番图是有系统地处理这类方程的先行者。

他写了三部书，其中最出色的是《算术》(Arithmetica)，还有一部是《多角数》(De polygonis numeris)，另一部已失传。《算术》原来有13卷，现只剩下6卷。这是一部伟大的著作，它在历史上的重要性可以和欧几里得《几何原本》一比高下。

希腊时代，“算术”(arithmetic, ἀριθμητική) 一词专指“数的理论”而言，它和实用的“计算技术”(logistic, λογιστική)有明显的区别。[1] 这种区别到中世纪还继续保持着。印度-阿拉伯数码传入欧洲以后，使用这种数码的演算常常叫做“算法”(algorism)。实用的计算叫做“次要技巧”(l'arte minore)，以别于理论的“主要技巧”(l'arte maggiore)。[2]

丢番图的《算术》是讲数的理论的，不过大部分的内容可以划入代数的范围内。丢番图的特点，是完全脱离了几何的形式，在希腊的数学中独树一帜，与欧几里得时代的经典大异其趣。

他虽然已经知道符号的运算法则：减号乘减号得加号（即负乘负得正）等等，但解方程时却只限于正根，如果有负根出现，便认为这方程是不合理的。丢番图小心选择方程的系数，使所得的根是正数。解二次方程的时候，即使两个根都是正的，他也只取一根。这里还看到特殊的三次方程，猜想在已失传的部分中还有进一步的论述。

---

〔1〕 T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I (1921) p.13.

〔2〕 V. Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p.73.

丢番图在处理 $Ax^2+C=y^2$, $Bx+C=y^2$ 等类型的不定方程时显示出惊人的巧思，千年以后，还无出其右者，不过各个题都用特殊的方法去解决，很少给出一般的法则，甚至性质很相近的题解法也不同，这恐怕是丢番图的最大缺点。难怪韩克尔(Hermann Hankel, 1839—1873，德国数学史家）说："近代数学家研究了丢番图100个题后，去解101个题，仍然感到困难"。[1] 因此近代的数论家如欧拉、拉格朗日、高斯等解决不定方程时不得不另觅途径。

丢番图并不知道除法运算，象其他的古代著作一样，缺乏商的概念。那时除法是用累减法来进行的。

丢番图另一重要贡献是用字母来表示未知数和一些运算，这是近世符号代数的嚆矢。

（三）　印　　度

7世纪印度的婆罗摩及多（Brahmagupta，约598—？）对代数学也有很大推进。他是印度中部印多尔(Indore)之北乌贾因(Ujjain)地方的人。乌贾因是当时的天文学中心，观象台的所在地。

婆罗摩及多在30岁（628）的时候，就写成《婆罗摩修正体系》(Brahma-sphuta-siddhānta)[2]，包括《算术讲义》

〔1〕 F.Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.36.

〔2〕 Brahma 也译成"梵天"，是婆罗门教、印度教的主神之一，是创造之神。

(Gaṇitād'hāya) 和《不定方程讲义》(Kuṭakhādyaka) 等专章。有整数、分数、数列、比例、平面及立体的度量，影子计算（三角学的雏形，由日晷的应用而引起）等方面的论述。

婆罗摩及多大量地将代数用于天文学。给出负数的运算法则，用小点或小圈记在数字上以表负数。得到二次方程 $x^2+px-q=0$的一个根的公式

$$x=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}.$$

《婆罗摩修正体系》所载问题偏于天文方面，印度书中常见的离奇古怪的题目并不多见。后来的注释者补上一些以说明某种法则。如：

山上住着两个苦行者，一个是巫师，会在空中飞行。他从山顶笔直跳到空中去，到达某一高度后，斜降到一个小镇上。另一个从山顶垂直到达地面，再步行到同一小镇。二人所经距离相等，求山和小镇的距离，和巫师升空的高度。

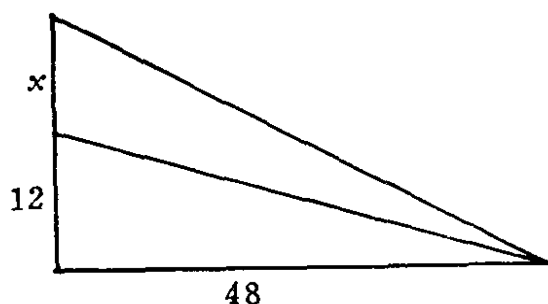


图 19

这本是一个二次不定方程，注释者按图19的数字求得 $x=8$。

不定方程的研究是印度数学特色之一。阿利耶毗陀已开始讨论不定方程

$$ax\pm by=c$$

的解。婆罗摩及多更进一步给出通解的一般形式，并解二次不定方程

$$Du^2+1=t^2.$$

但未列出演算步骤. 后来婆什迦罗又重新研究这一问题.

婆罗摩及多除了第一个未知数（称为yâvattâvat）外，其余的未知数用颜色表示. 叫做黑、蓝、黄、红、绿等，并取字头来作未知数的符号. $y\hat{a}$ 相当于我们的x，$k\hat{a}$ 相当于y.

摩诃毗罗(Mahāvīra，约850年)是印度南部买索尔（Mysore）地方的人. 他比婆罗摩及多的工作更完备. 著有《计算精华》（Gaṇita-Sāra-Sangraha）一书. 富有幻想性的问题，如：有一条很厉害的黑蛇，长32"哈士他"(hastas)[1]，要钻进一个洞里去. $\frac{5}{14}$日内钻进 $7\frac{1}{2}$ "安古拉"（angulas)[2]，但在$\frac{1}{4}$日内它的尾巴增长 $2\frac{3}{4}$"安古拉"，何时才完全钻入洞中?

摩诃毗罗曾见到中国的数学书，这可以从他使用了《九章算术》的弓形面积公式[3]

$$S=\frac{1}{2}(b+h)h$$

得到证明. 这公式误差很大.

婆什迦罗（Bhāskara， 1114—1185?)是 1000—1500 年间印度最突出的数学家. 生于南部的比杜尔（Biddur)， 长期工作在乌贾因，这是五百多年前婆罗摩及多的老家.

婆什迦罗有天文、算术、度量、代数等方面的著作，其中以《丽罗娃提》(Lilāvati)[4]最为驰名.

---

〔1〕、〔2〕都是长度单位.

〔3〕 F. Cajori, A History of Mathematics(1919) p.97.

〔4〕原意是"美丽"，是他女儿的名字. 关于书名的传说见 D. E. Smith, History of Mathematics, vol.Ⅰ(1923) p.276.

其中许多代数问题也是用歌谣来给出的．例如：

“素馨花开香扑鼻，

诱得蜜蜂来采蜜．

熙熙攘攘不知数，

一群飞入花丛里．

试问此群数有几？

全体之半平方根，

另有两只在一起．

总数的九分之八，

徘徊在外做游戏．”

这导致无理方程

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+2=\frac{x}{9},$$

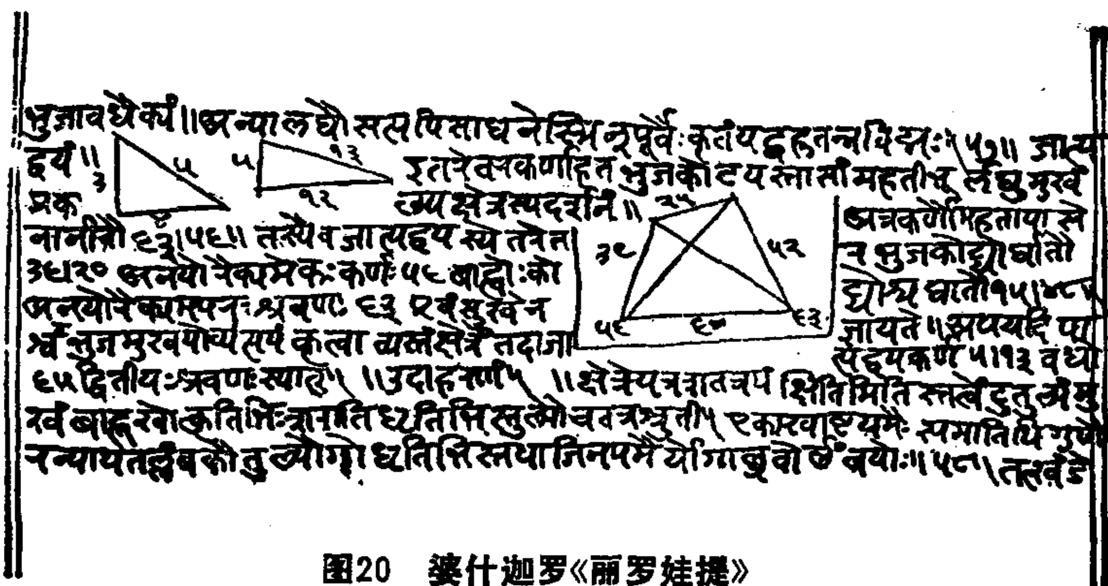


图20　婆什迦罗《丽罗娃提》

答案：总数 $x=72$．

婆什迦罗另有一本叫做《算法本原》[1] (Bija Gaṇita)，这

〔1〕直译为“种子算术”．

是一本代数学．比较全面地讨论了负数，把负数叫做“负债”或“损失”，并在数码上加小点来表示．如 $\dot{3}$ 表示 -3．他正确地叙述了负数的运算法则：“正数、负数的平方，常为正数；正数的平方根有两个，一正一负；负数无平方根，因为它不是一个平方数。”

一次和二次方程的讨论比其他印度作家详尽，同时也大大超过了希腊的丢番图．婆什迦罗承认二次方程有两个根，但将负根弃去不取．譬如指出 $x=50, -5$，都是 $x^2-45x=250$ 的根，但接着说：“本例的第二值不适宜，故弃去，因为人们不赞成负根。”

希腊人虽然最早发现了不可通约量，然而久久不承认无理数是数．婆什迦罗和别的一些印度数学家有一非常了不起的成就，就是打破无理数与有理数之间的森严界限．他们广泛地使用无理数，在运算中和有理数作同一处理，而两者之间的鸿沟，似乎置若罔闻。

（四）中亚细亚

9世纪到15世纪，中亚细亚在代数方面，除了阿尔·花拉子模外，阿尔比鲁尼（Albêrûnî 或Al-Bîrûnî, ал-Бируни, 约 973—1048），阿尔·卡黑（Al-Karkhî, ал-Кархи, 约卒于1029），奥玛尔·海雅姆（Omar Khayyam, Омар Хайям, 约1036至1048生，1123或1124卒）[1]等都有所贡献。

〔1〕生于内沙布尔(Nishapur)，今伊朗东北角，卒于同地。

奥玛尔·海雅姆是诗人兼科学家，他的《代数学》1851年译成法文"L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî"，详尽地研究三次方程，借助圆锥曲线去求方程的解。这种方法是整个中亚细亚最重要的功劳之一，它是希腊圆锥曲线论的发展。

奥玛尔·海雅姆展开了 $(a+b)^6$，这是二项定理的前奏。他区分了若干类可解的三次方程，至于一般的三次方程的解决，还有待人们对负数、无理数和虚数的认识。

在阿尔·卡西[1]的《算术之钥》（约1427）中，看到二项式 $(a+b)^n$ 当 n 是自然数时的一般展开式

$$(a+b)^n - a^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

并给出"帕斯卡三角形"[2]的系数组成法则[3]

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}.$$

（五）欧　　洲

12、13世纪欧洲数学界的中心人物是意大利的斐波那契（Leonardo Fibonacci，约1170年生于比萨，1250年卒），也叫做比萨的留那多(Leonardo pisano)。斐波那契早年跟随父亲（比萨的商人）到北非的部计(Bugia)[4]去受教育。后来

〔1〕见本书第七章第三节p.187.

〔2〕见本书第十七章第四节.p.427.

〔3〕原书p.19，俄译本 p.333注释23,24条.

〔4〕今阿尔及尔东部的小港口贝贾亚(Bougie).



斐波那契(Fibonacci)

又到埃及、叙利亚、希腊、西西里、法国南部等地游历．拜访了各处的学者，熟习不同国家在商业上所用的算术体系，他认为这些计算方法和使用印度—阿拉伯数码的算法比较起来，还是很落后的．当他回到意大利以后，便写成《算盘书》(Liber Abaci，1202)[1]，介绍印度—阿拉伯数码．[2]

这本书共分15章，1至7章是记数制度和整数分数的各种算法；8至12章是商业上的应用；13章是有名的“试位法”[3]；14章是开平方、开立方的法则；15章是几何度量和代数问题．

斐波那契《算盘书》的弱点是缺乏一般的法则，没有代数运算符号，这增加了解题的困难．1228年修订本中载有“由一对兔子开始，一年后可以繁殖成多少对兔子”的有趣问题．这

〔1〕Liber 是书；abacus（复数 abaci）直译是算盘，来自希腊文 ἄβαξ．原指一种象棋盘一类的东西，上放沙子或土，用来画图或计算，不是中国算盘．后来中国算盘也叫abacus，不过常冠以Chinese（中国的）以示区别．当时abacus 可用作算术的代名词，斐波那契的书并不专讲算盘而是讲算术，所以也可以译成《算术书》．

〔2〕见本书第四章第三节．p.73．

〔3〕见本书第十四章第五节．p.356．

导致很有名的“斐波那契数列”：[1]

$$1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots$$

每一项等于前两项的和，$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}(n\geqslant 3)$，

而且 $u_{n-1}:u_n\to\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=0.6180339887\cdots$。这数列有很多有趣的性质，注意$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$正是将单位线段分成黄金比例的大线段的长。某些生物的生长在某种假定下也可以构成斐波那契数列。[2]

斐波那契还写过《几何实用》(Practica geometriae 1220)，《象限仪书》(Liber quadratorum, 1225)，《开花》(Flos)等书。《开花》这个奇怪的标题用来表明代数学是数学中的花朵。

斐波那契有很高的才智，从他被召至腓德烈第二（Frederick Ⅱ, 1194—1250，神圣罗马帝国王）的宫廷中，和宫廷学者巴勒摩的约翰（John of Palermo[3]，约1200年）进行比赛的事情就可以知道。约翰出了几个难题，都被斐波那契一一解决了。这些题目后来记在《开花》和《象限仪书》中。

第1题：求一数，它的平方加5或减5后仍然是平方数。

〔1〕题目假定，一对兔子每一个月可以生一对小兔子，而小兔子在出生后两个月就有生殖能力。参看 Н.Н. Воробьев《斐波那契数》(Числа Фибоначчи)，高彻译，(1954)。又А.И. Маркушевич《循环级数》(Возвратные последовательности)，朱美琨译，(1952)。

〔2〕H. Steinhaus《数学万花镜》裘光明译，(1952)p.23。

〔3〕西西里岛北岸。

斐波那契的答案是$\frac{41}{12}$。[1]

第2题：解三次方程$x^3+2x^2+10x=20$。

那时候三次方程还没有普遍的代数解法，斐波那契试解了几次都失败了。后来改变了处理方法，用清晰而严格的方法证明这方程的根不能用欧几里得的无理量来表示（即不能用尺规作图求解），然后求出它的近似值

$$x=1^{\circ}22'7''42'''33^{\mathrm{iv}}4^{\mathrm{v}}40^{\mathrm{vi}}\ (60\text{进制})$$

相当于　$x=1.368,808,107,85,$[2]

准确数字达10位之多。可惜他没有说明解题的方法与步骤。[3]

第3题：甲、乙、丙三人共有一笔款，甲占$\frac{1}{2}$，乙占$\frac{1}{3}$，丙占$\frac{1}{6}$。现在各取钱若干，直到取完为止，然后甲放回其所取的$\frac{1}{2}$，乙放回所取的$\frac{1}{3}$，丙放回所取的$\frac{1}{6}$。再将放回的平均分给三人，这时各人所得恰好是他们应有的。问原有钱若干？第一次各取若干？

这是一个不定方程问题，斐波那契得出一组解答：原有钱47，第一次各取33，13，1。[4]

有斐波那契这样出色的学者把印度—阿拉伯数码和数学介

---

〔1〕$\left(\frac{41}{12}\right)^2=\frac{1681}{144}$，$\frac{1681}{144}+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2$，$\frac{1681}{144}-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2$。题目的条件更准确地应说成有理数的平方，不过当时还没有这个术语。

〔2〕这是唯一的实根，另两个根是虚的：$-1.684404\pm3.431331i$。

〔3〕V. Sanford, A Short History of Mathematics(1930) p.145,186.

〔4〕J.W.N. Sullivan, The History of Mathematics in Europe (1925).

绍到欧洲来，人们也许以为数学会在欧洲的土地上很快地成长壮大．但事实却不然，13—15世纪欧洲发生了一系列的动乱，包括教皇和皇帝为争夺土地和权力、争夺在西欧的霸权地位的斗争，英法的“百年战争”(1337—1453)，英国为争夺王位的“玫瑰战争”(War of Roses, 1455—1485)，还有连年的鼠疫．数学进展的缓慢，不仅仅是战争和瘟疫，烦琐哲学(或经院哲学)[1]的势力也压得科学抬不起头来．很多学者的精力消磨在争辩玄妙莫测的形而上学和神学的论题上，譬如对“一个针尖上可以站立多少个天使”这样无聊的问题，也有很大的兴趣．[2]

代数方程论的进一步突破，发生在16世纪初年的意大利．

15世纪末叶，欧洲开始有印刷的数学书籍．意大利的巴巧利(Luca Pacioli, 约1445—1514)的《算术、几何、比与比例集成》(Sūma de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita)在1494年印刷于威尼斯．这是最早印刷的数学书之一．

这本书取材于欧几里得、托勒密、斐波那契等人的著作，几乎包罗了当时的所有数学知识．使用了印度—阿拉伯数码，大量采用符号．使数学知识广泛地传播开来．巴巧利在结束他的书时却说：“$x^3+mx=n$，$x^3+n=mx$ (m, n 是正数) 现在之不可解，正象化圆为方问题(意思是不可能)一样．”[3]这无疑给数学界很大的刺激，使得许多学者致力于三次方程的

〔1〕欧洲中世纪占统治地位的基督教哲学，论证人类是由上帝的意志所支配的．

〔2〕F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p.125.

〔3〕日本细井淙《东西数学思想史》(1953) p.161. Morris kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times(1972) p.237.

解决。

不久，三次方程，随后是四次方程就获得了解决.[1] 在这方面研究的有塔塔利亚，卡当，斐拉里，邦别利(Rafael Bombelli，约1530年生）等人。

（六）虚数、数值解法

卡当的另一个功劳，是认真地引入了虚数，并承认它是方程的根. 虚数的出现，是数学史上一件大事. 有了虚数，和原有的实数合并成为复数域. 根据代数基本定理，任何复系数的多项式在复数域里必有根，而且n 次多项式恰好有n 个根，这就解决了根的存在性问题. 为了求得方程的根，有了复数域，问题已完全解决，无需再扩大数系了。

虚数最初是在解二次方程的过程中出现的. 1484年，舒开(Nicolas Chuquet，?—1500?法国人）在《算术三篇》（Triparty en la Science des Nombres）中，解二次方程

$$4+x^2=3x,$$

得根 $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4}$，他声明这根是不可能的.[2]

1545年，卡当第一个认真地讨论虚数，并给出运算的方法. 在《大术》中，他解这样的问题：两数的和是10，积是40，求这两数。

---

[1] 见本书第四编七、《四百多年前的数学竞赛》，p. 503.

[2] F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1929) p. 126.

用现代的符号，可列成方程

$$x(10-x)=40,\quad x^2-10x+40=0,$$

$$x=5\pm\sqrt{15}i.$$

卡当将　　$5+\sqrt{-15}$写成5.$\tilde{p}$.R̸.$\tilde{m}$.15.

其中R̸相当于根号，$\tilde{m}$是减（即负），R̸.$\tilde{m}$.15.是$\sqrt{-15}$.这是最早的虚数表示法.他称负数的平方根为“诡辩量”(quantitates sophisticae)[1]，并怀疑这种数的运算的合法性.

卡当称正根为真实的(real)根，而负根为虚构的(fictitious)根.实和虚的用法和现在不同.

1637年，笛卡儿在《几何学》[2]中第一次给出虚数的名称“imaginaires”（虚的），和“reelles（实的）”相对.

1777年，欧拉在递交给彼德堡科学院的论文《微分公式》(De formulis differentialibus etc) 中首次使用 i 来表示 $\sqrt{-1}$，但很少有人注意它.直到1801年，高斯系统地使用这个符号，以后渐渐通行于全世界.

瓦里士意识到在直线上不能找到虚数的几何表示，他给虚数作这样的解释：假设某人失去10亩土地，也就是他得到-10亩土地，又如果这块地是正方形，那么一边的长就是$\sqrt{-10}$.

真正作出虚数合理解释的是未塞尔(Caspar Wessel, 1745—1818)，他生于挪威的仲斯拉（Jonsrud），在丹麦科学院作了多年的测量员.1797年，未塞尔向丹麦科学院递交论文《方

〔1〕Gerhard Kowalewski, Grosse Mathematiker, 中野广日译本《数学史》p.53.

〔2〕原本p.380，原文为法文.

向的解析表示，特别应用于平面与球面多边形的测定》[1]，其中用 $+1$ 表示正方向的单位，$+\varepsilon$ 表示另一种单位，方向与前者垂直且有相同的原点。并记作 $\sqrt{-1}=\varepsilon$，$\cos v+\varepsilon\sin v$。除了虚数单位的符号不同之外，和现代复数平面的表示法一致。

1806年，日内瓦的阿工（Jean Robert Argand，1768—1822）在巴黎发表题为《虚量，它的几何解释》的论文，也给出类似的表示，不过没有未塞尔那么严密。他用“模”(modulus) 这个词来表示向量 $a+ib$ 的长度，这个术语就源出于此。[2]

高斯在1799年已经知道复数的几何表示，但直到1831年才作出详细的说明。他主张用数偶 (a,b) 来代表 $a+bi$，这样复数的和与积都可以用纯代数的方法来定义，而无需作几何解释。这一思想在1837年由哈密顿发表出来。

欧拉在1748年给出著名的公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

若令 $x=\pi$，就得到　$e^{i\pi}+1=0$.

克莱茵认为这是整个数学中最卓越的公式之一。[3]它把数学中五个最重要的数 $1,0,i,\pi,e$ 联系起来。

虚数的几何表示发现以前，虚数总给人虚无缥缈的感觉，

---

〔1〕原文为丹麦文，1799年收入论文集中。一个世纪之后(1897)发表它的法文译文“Essai sur la représentation analytique de la direction”. F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1929) p.128.

〔2〕F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p.265.

〔3〕见F. Klein, Vorträge über ausgewahlte Fragen der Elementargeometrie, 英译本Famous Problems of Elementary Geometry (1955) p.59.

甚至大数学家也不例外。最典型的是莱布尼兹(1702)，他说："（虚数）是理想世界的奇异创造，几乎是介于存在与不存在之间。"[1]

复数的几何解释帮助人们直观地理解它的真实意义，它也可以看成是一种平面向量。复数在数学中和其他科学中日益起着不可估量的作用，在19世纪中叶以后发展成一个庞大的数学分支——复变函数论。

高斯非常重视代数基本定理，他曾给出四个严格证明。第一个是在1797年（当时仅20岁），这是他的博士论文（1799年发表），第四个发表于1850年，和第一个相隔整整半个世纪。"代数基本定理"这一名称看来也是他提出来的。

数学家认识到这个定理（或 n 次方程有 n 个根）却是很早的事。可以上溯到1608年的罗特（Reter Rothe），以后是1629年的基拉德(Albert Girard)。1742年12月15日欧拉在一封信中明确地陈述了这个定理。在高斯之前，达朗贝尔已给出证明（1746），但高斯的证明更为严整。后来欧拉（1749），拉格朗日（1772）等人都试证过。[2]

在实用上，往往只需要求出实系数方程的实根近似值。这首先要确定根的位置。斯图谟（Jacques Charles François Sturm, 1803—1855）解决了这个问题。他是日内瓦人。1829年他给出一个方法，确定了实根的位置，后来被称为"斯图谟定理"。当时他没有给出证明，证明是维也纳（Vienna)的爱丁豪

---

〔1〕直译是"它几乎是存在与不存在之间的两栖动物(amphibio)".V.Sanford, A Short History of Mathematics(1930) p.187.

〔2〕D. E. Smith, A Source Book in Mathematics, vol. Ⅰ (1959) p.292.

生(Andreas von Ettinghausen, 1796—1878)在1830年给出的，斯图谟自己在1835年也给出了证明.

霍纳(William George Horner, 1786—1837.9.22)幼年在英国西南布里斯托尔(Bristol)附近的金斯武(Kingswood)学校受教育，没有进过大学. 1809年他在布里斯托尔东南的巴斯(Bath)地方创办学校，在那里度过了一生.

1819.7.1，霍纳在英国皇家学会宣读他的论文《用连续逼近法解所有阶的数字方程的新方法》(A new method of solving numerical equations of all orders,by continuous approximation)，提出求实根近似值的“霍纳方法”. 实际上类似的方法已在1804年为鲁非尼(Paolo Ruffini,1765.9.23—1822.5.10)所得.[1]

“霍纳方法”和我国秦九韶(1247)的方法完全一样. 霍纳和鲁非尼大概都不知道在五百多年前中国人在这个问题上已经捷足先登了. 将这方法改称为“秦九韶法”是完全合理的.

第三节 对数与指数

对数是资本主义发展初期的产物，它随着15世纪以来商业发达，货币交换的频繁以及天文航海的复杂计算而兴起. 16、17世纪之交，精密的三角函数表已经制成，反而增加了许多繁重的演算. 这时迫切需要改进数字计算的方法.

[1] D.E. Smith, A Source Book in Mathematics, (1959) p.232, 载有霍纳论文的摘录.

对数的思想，可以追溯到15世纪数学家对等差数列与等比数列所作的比较。例如，写出 n 与 2^n 两个数列：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	…

欲求第二行任意两个数的积，只要计算与这两个数对应的第一行的数之和即可。如求 32×128，32 对应的第一行数是 5，128对应 7，$5+7=12$，在12下面的4096就是所求的数。

早在1484年，舒开已注意到这种关系。1544 年史提非（Michael Stifel，1487.4.19—1567.4.19）在《整数算术》（Arithmetica Integra）中把第一行数叫做“指数”（德文 Exponent，原意是“代表人物”或“代表者”）。[1] 史提非的原意可能是：要计算两数的积，只需求这两数的“代表”的和即可。后来Exponent（英文exponent，法文exposant）成为正式的数学术语。

（一）纳皮尔对数

对数的创始人是纳皮尔(John Napier)，[2] 他是苏格兰的贵族，1550年生于苏格兰爱丁堡附近的麦启斯顿(Merchiston)，1617.4.4 卒于同地。纳皮尔 1563 年入圣安德卢斯（St. Andrews）大学，又到过欧洲留学，1571年重回苏格兰。

---

〔1〕 V.Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p.176.

〔2〕 旧译讷白尔，见阮元《畴人传》(1799) p.561. 又拼作Naper, Naperus, Neper, Neperius.

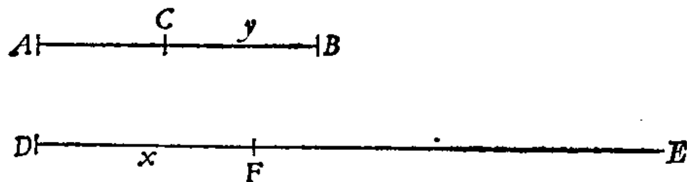

纳皮尔(Napier)

纳皮尔对数字计算特别有研究．球面三角中的"纳皮尔比拟式"(Napier's analogies)，"纳皮尔圆部法则"(Napier's rules of circular parts)，以及作乘除法用的"纳皮尔算筹"(Napier's rods or bones)都很有名．尽管当时的人以为这些是纳皮尔的生平杰作，可是比起他的伟大发明——对数来，只是雕虫小技而已．

18世纪大数学家拉普拉斯曾说对数"用缩短计算的时间来使天文家的寿命加倍"．这是毫不夸张的评价．[1]

那时指数的概念尚未完成，也没有指数符号，纳皮尔本人更不知"底"为何物．一直到欧拉才发现指数与对数的天然关系．对数的建立先于指数，倒是历史上的珍闻．[2]

纳皮尔不从指数出发，怎样得到对数的概念呢？不妨用现代的术语来说明一下：



〔1〕F. Cajori, A History of Elementary Mathematics(1916) p. 155.

〔2〕李俨《中算史论丛》第三集 (1955) p.69,《对数的发明和东来》. 李俨《计算尺发展史》(1962).

设 AB 是定长的线段，DE 是从 D 点出发的射线．现在有 C,F 两点，C 点从 A 向 B 运动，F 点从 D 向右运动．两点同时以相等的初速出发．F 的运动是等速的，而 C 点的速度与线段 CB 的长成正比（比例常数是 1）．当 C 点行过一段距离 AC 以后，F 点行过一段距离 DF，纳皮尔称 DF 为 CB 的对数．

命　$AB=a=10^7$，$CB=y$，$DF=x$．那么 $AC=a-y$．C 点的速度是

$$\frac{d(a-y)}{dt}=y,$$

即得　$$-\ln y=t+c. \tag{1}$$

当 $t=0$ 时，$y=a$，故 $c=-\ln a$．

另一方面，F 的速度

$$\frac{dx}{dt}=a,\ 即 x=at.$$

将 t,c 的值代入（1）得

$$-\ln y=\frac{x}{a}-\ln a,$$

或　$$x=a\ln\frac{a}{y}. \tag{2}$$

x 就是 y 的对数．我们叫它做 y 的“纳皮尔对数”，用 Nap.log$y$ 来表示．另外，将 $a=10^7$ 代入（2），就得到“纳皮尔对数”与自然对数的关系：

$$\text{Nap.log}\,y=10^7\ln\frac{10^7}{y}.$$

纳皮尔造对数表，实质上是给出上面微分方程的近似积

分.[1] 由此可知，纳皮尔对数和自然对数是两回事。不少教科书把二者混为一谈.

纳皮尔的对数大作《奇妙的对数定律说明书》(Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio) 于1614年6月在爱丁堡出版.[2]

"对数" (logarithm) 一词，源出于希腊文的λόγos (拉丁文logos) 是表示思想的文字或记号，也可作"计算"或"比率"讲. 它和另一字 ἀριθμός (数) 结合起来便成 logarithm 这个字.

我国"对数"的名称是这样来的. 17世纪中叶以后，对数与对数表传入我国，在 lg2 = 0.30103 这样的式子里，2 叫做"真数" (这个名称至今不变)，而0.30103 叫做"假数"，"真数与假数对列成表"，所以叫做"对数表".[3] 后来"假数"这个名称渐渐不用，把0.30103 叫做 2 的"对数".

对数的发表，震惊了伦敦的一位数学家布里格斯 (Henry Briggs)[4]，他1561年2月生于英格兰的约克夏 (Yorkshire)，1631年1月26日卒于牛津. 先是伦敦克累沙姆学院 (Gresham College) 几何教授，以后是牛津大学天文学教授. 布里格斯

---

〔1〕 А.П.Юшкевич《历史概略》，载В.В.Степанов《微分方程教程》，卜元震译，(1959).

〔2〕 英译文见D.E. Smith, A Source Book in Mathematics (1959) p.149.

〔3〕 《数理精蕴》(1723)下编卷三十八"对数比例"一节："以借数（即假数）与真数对列成表，故名对数表." 又伟烈亚力《数学启蒙》(1853)："对数者通繁难之数，易于算也. 其用必须立表，以假数与真数对列，故名对数表."

〔4〕 旧译为巴理知、巴理知斯.

最先认识到对数的头等重要性，1616年，他决意到苏格兰去拜访纳皮尔。[1]

布里格斯建议将对数改良一下，以便于计算。相当于改为以10为底的常用对数。这种见解，纳皮尔也曾想过。第二年（1617）纳皮尔逝世，布里格斯以毕生的精力，继承纳皮尔未竟的事业。

1624年布里格斯出版《对数算术》（Arithmetica logarithmica），刊载1至20,000以及90,000到100,000的14位以10为底的对数表。而20,000到90,000的空隙，到1628年由佛拉哥（Adrian Vlacq，1600?—1667）[2]补足。

瑞士的彪奇（Jobst Bürgi，1552.2.28—1632.1.31）年轻时是钟表匠，以后研究天文。他也独立发现了对数，可能还早于纳皮尔，但发表较迟（1620），这时纳皮尔的对数已闻名全欧了。

纳皮尔的对数并不是自然对数，到伦敦的斯彼得（John Speidell）《新对数表》（New Logarithmes，1619）出现，才和自然对数（以$e=2.71828\cdots$为底）接近。

穆尼阁（Jean Nicolas Smogolenski，1611—1656，波兰人），1648年（清顺治3年）来中国，以对数、三角学等教授方中通、薛凤祚（?—1680）。1653年穆尼阁、薛凤祚合编《比例对数表》，这是我国最早的对数著作。

戴煦（1805—1860）是钱塘（今杭州）人，我国清代的数学家。"十龄后即好畴人学（天文、数学），昼读夜布算，覃思

[1] William Lilly（1602—1681），History of his Life and Times 记述这两位学者会面时的激动情况。见E.T. Bell, Men of Mathematics（1937）p.526.

[2] 生于荷兰高达（Gouda），卒于海牙。

有得，则秉烛以记”。[1] 他无心于功名，一生没有做官。研究对数很有成绩，觉得旧有求对数的方法头绪纷繁，初学者颇难了解，于是详加推究，发现捷法多种。 著成《对数简法》(1845)，《续对数简法》(1846)，《假数测圆》(1852)，总名《求表捷术》。

1854年，有一个英国人艾约瑟（Joseph Edkins，1825—1905），在李善兰和张福僖（？—1862）处看见戴煦的著述，大为叹服。这年他专程到杭州拜访戴煦，戴煦竟不予接见。[2] 艾约瑟大失所望，但对戴煦的崇敬并未稍减，他将戴煦的书译成英文，寄回英国的“算学公会”。这是对数历史上的一段佳话。

（二）幂的概念

指数与幂的概念的形成是相当曲折和缓慢的。

我国古代幂字至少有十种不同的写法。最简单的是“冖”。“幂”作名词用是用来覆盖食物的巾，作动词用就是用巾来覆盖。《周礼·天官·幂人》：“祭祀，以疏布巾幂八尊，以画布巾幂六彝”。[3]《仪礼·公食大夫礼》：“簠[4]有盖幂”。

---

〔1〕诸可宝(1845—1923)《畴人传三编》(1886)，《戴煦》。

〔2〕诸可宝《畴人传三编》卷三《张福僖》，卷七《艾约瑟》。传记中没有记载不接见的原因。那时是在鸦片战争之后，可能他仇恨英国人。张福僖和他也素不相识，去拜访他时，不但没有吃闭门羹，还“小住数日，抄副本去”，可见戴煦对外国人是另眼相看的。

〔3〕尊、彝都是古酒器名。

〔4〕古代祭祀时盛谷物的方形器皿。

《说文解字》解释说："冖，覆也，从一下垂也。"又《玉篇》[1]："冖，以巾覆物。"

用一块方形的布盖东西，四角垂下来，就成冖的形状。将这意义加以引申，凡是方形的东西也可以叫做幂。再进一步推广，矩形面积或两数的积（特别是一个数自乘的结果）也叫做幂。这种推广是从刘徽开始的。

刘徽为《九章算术》作注（263年），在《方田》章求矩形面积法则下面写道："此积谓田幂，凡广从相乘谓之幂（长和宽相乘的积叫做幂）"。这是在数学文献中第一次出现幂字。

三百多年以后，李淳风（656年）重注《九章》，还不同意刘徽这样使用幂字。在《九章》卷九《勾股》章中，刘徽表述勾股定理为："勾股幂合以成弦幂。"这里幂是指边自乘的结果或正方形面积。这种用法一直继续到元朝初期（如朱世杰,1303）。以后我国数学出现中断的情况。到了明朝，程大位《算法统宗》（1592），完全不使用幂字。

1607年，利玛窦和徐光启合译欧几里得《几何原本》，在译本中徐光启重新使用了幂字。第1卷47题是勾股定理，出现了幂字，并有注解："自乘之数曰幂。"这是第一次给幂这个概念下定义。

梅文鼎《梅氏历算丛书辑要》（自序作于1693）卷十的幂字下面给出小注："音觅。《周礼》幂人掌供巾幂。《说文》：覆也。开平方四边俱等，中函纵横之积，亦如覆物之巾，有经纬缕文，故谓之幂，亦谓之面。"梅文鼎对幂的意义特别加以解释，可见当时这个概念并不是尽人皆知的。当时有些书如

[1] 梁顾野王撰（6世纪）。

《数理精蕴》（1723）就不使用幂字。

1935年《数学名词》译involution 为乘方，power为幂或乘幂，这两个术语才算确定下来。

希腊丢番图称数的平方为 δύναμις，这字原来的意义是力量、势力或权力。但并不表示一般的幂，他称立方为κύβος，4次幂为δυναμοδύναμις（平方的平方）。[1]

现在作为数学术语的幂，相当于拉丁文的potestas，德文Potenz，法文puissance，英文power，意大利文potenza，原来的意义都是权力、威力或能力，后来引申为数学术语。

1591年韦达的代数名著《分析方法入门》（Isagoge in artem analyticam）中使用拉丁文potestas 和gradus（相当于英文grade，等级，程度）表示x^m 和x^n。以后 potestas 译成意义相当的power（英），Potenz（德），puissance（法）等。现在集合论里 power 的译名仍用“权”和“势”。有趣的是俄文幂字степень，原义和韦达的另一个字gradus相当。

（三）乘方与指数

我国乘方与指数的概念最早出现在音乐的理论中。

古代利用竹管来定音律，是根据“三分损益”的原则，取一根9寸长的竹子作标准，吹出的音调叫做“黄钟”。然后“三分损一”（去掉$\frac{1}{3}$），剩下6寸作为第二根管的长。再

〔1〕T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol.Ⅰ (1921) p. 457, p.546.

“三分益一”（乘以$\frac{4}{3}$），所得的8寸作为第三根管长。[1]这样连续做四次，得到五根长度不同的管子，吹出古代常用的五个音：宫、商、角、徵（音zhǐ）、羽．相当于do、re、mi、so、la。

如果定第一根管长为81（$=3^4$），那么五根管长都是整数：81、54、72、48、64．《史记·律书》说明这个方法：“九九八十一以为宫，三分去一，五十四以为徵；……六十四以为角．”角以下再三分损益，就不是整数了．所以说：“音始于宫，穷于角。”

三分损益继续做下去，可以得到十二律．但要保持损益后所得的十二个数都是整数，可以假定第一根管长为3^{11}（=177,147）．最早记载这种理论的是《淮南子·天文训》．[2]

《天文训》讲到乐律，有这样几句话：

“故黄钟之律九寸，而宫音调；因而九之，九九八十一，故黄钟之数立焉。……十二各以三成，故置一而十一三之，为积分十七万七千一百四十七，黄钟大数立焉．”[3]

“九之”是以九乘之或九倍之．“十一三之”是十一次以三乘之或乘以3^{11}．古代是用筹来运算的，用数去乘1，先将

〔1〕参考（1）田边尚雄《中国音乐史》，陈清泉译（1937）。（2）许之衡《中国音乐史》（1930）。（3）戴文赛《音乐的数学》，载《科学大众》（1951.12）10卷5期。

〔2〕《淮南子》是汉刘安（约公元前200—122年）或他的门客所作．刘安是刘邦的孙子，袭其父封为淮南王，所以叫《淮南子》。这书内容很庞杂，《天文训》是汉以前论天学说的汇要．现在根据的是后汉高诱注的本子．见沈德鸿选注《淮南子》（1931）。

〔3〕此处断句照刘文典《淮南鸿烈集解》（1921）p.74。

1放置好，所以说“置一”．上面这几句话可翻译如下：发出黄钟音律的管长9寸，它的音调叫做宫．用9去乘它，得81．81这个数叫做黄钟之数．12律的每一个是根据三分损益这个原则造成的．所以将1乘3十一次（即乘以3^{11}）．得到的积，分管长为177,147（$=3^{11}$）等份．这177,147叫做黄钟大数，以别于黄钟数81．

很明显，“置一而十一三之”就是乘方运算，11就是现在的指数．整句话包含式子$1\times3^{11}=177,147$，具有指数的初步概念！

这种算法并不是到《淮南子》才有的．《管子》[1]卷十九《地员篇》讲到乐律，也说：“先主一而三之，四开以合九九”．王引之（清嘉庆间人）校正说：“主当为立，字之误也．《史记·律书》云：‘置一九三之以为法’．置一即立一．”[2]所以主一就是置一，意思和《淮南子》一样．1用3去乘，连乘4次（四开）便得九九之数，即$1\times3^4=9\times9=81$．

注意这里四开的字样，特别明显地将指数概念表达出来！

（四）指数符号的创设

16世纪韦达对数学符号颇多改良，但没有创设优良的指数

[1] 大概不是管子（约公元前705—645）所作，而是战国（公元前4世纪）时的作品．约早于《淮南子》两个世纪．

[2] 郭沫若等《管子集校》下（1956）p. 909．李俨《中国古代数学史料》（1963）p.4．

符号．1591年他将D^2 写作D.quad.，将D^3 写作D cubum.

1636年居住在巴黎的苏格兰人休姆(James Hume)引入一种记号，用罗马数字表示指数，写在底的右上角，如 A^3 写作A^{iii}．除了罗马数字外，和现在的记法完全一样．一年以后，经过笛卡儿的改良和推广，成为现今通用的符号．[1]

分指数最早在奥力森的《比例算法》（Algorismus proportionum)中出现．[2]

他把

$$2^{\frac{1}{2}} \text{ 写作 } \boxed{\frac{1.p}{2.2}},\quad \left(2\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ 写作 } \boxed{\frac{1.p.1.}{4.2.2.}}.$$

他也把

$$9^{\frac{1}{3}}\text{写作}\frac{1}{3}.9^p,\quad 2^{\frac{1}{2}} \text{ 写作}\frac{1}{2}2^p.$$

西方最早提出负指数的是英国瓦利斯，在他的《无穷小算术》(Arithmetica Infinitorum，1655）中有这样的话：

"平方数倒数的数列$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{9}$，…的指数是-2，立方数倒数的数列$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{27}$，…的指数是-3，两者逐项相乘，就得到'五次幂倒数'（原文是拉丁文 subquintanis）的数列$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{32}$，$\frac{1}{243}$，…．它的指数显然是$-2-3=-5$．……同样，

---

〔1〕F.Cajori, A History of Mathematical Notations, vol.Ⅰ (1928) p.346.

〔2〕同〔1〕 p.91. 又D. E. Smith, History of Mathematics, vol.Ⅰ (1923) p.239.

‘平方根倒数’（原文 subsecundanis）的数列 $\frac{1}{\sqrt{1}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, …的指数是 $-\frac{1}{2}$, …”[1]

这是一个巨大的进步，不过瓦利斯没有真正使用$2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-\frac{1}{2}}$的指数符号，只是说$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$的指数是-2, -3和$-\frac{1}{2}$.

现行的分指数和负指数符号是牛顿创设的。他在 1676年6月13日去信给伦敦皇家学会秘书长奥丁堡转给莱布尼兹，里面说到：

“因为代数学家将aa, aaa, $aaaa$ 等写成a^2, a^3, a^4 等等，所以我将$\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$ 写成$a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$；又将$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$写成 a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, 将 $\frac{aa}{\sqrt{c.a^3+bbx}}$写成$aa\times\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{1}{3}}$, …”[2]

在这封信里有历史上最早的，带有任意有理指数的二项定理：

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ$$
$$+ \frac{m-3n}{4n}DQ + etc.$$

---

〔1〕英译文见D.E. Smith, A Source Book in Mathematics(1959) p. 217.

〔2〕D.E. Smith, A Source Book in Mathematics (1959) pp.224—225. 又J.F. Scott, A History of Mathematics (1958) p.163.

其中 $A=P^{\frac{m}{n}}$, $B=\frac{m}{n}P^{\frac{m}{n}}Q$ 等等，$\frac{m}{n}$是任意有理数。这就是 $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ 的展开式。

最先使用虚指数的是意大利人法革纳诺(Count de Fagnano, 1682—1766)。他在1719年发现

$$\pi=4\ \ln\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{i}{2}}$$

的关系。[1]

1679年莱布尼兹写信给惠更斯讨论方程

$x^x-x=24$, $x^x+z^x=b$, $x^x+z^z=c$.

这是引入变指数的开始。

牛顿最早提出带有有理指数的二项展开式，但没有证明。伯努利(J.Bernoulli, 1654—1705）的《猜度术》（Ars conjectandi, 1713）以排列组合的理论证明在正整数的场合下成立。马克劳林在1742年，卡斯特纳（Abraham Gotthelf Kästner）在1745年证明整指数的情形，欧拉在1774年证明分指数的情形。至于普遍（包括复指数）而严格的证明，到1826年才由挪威的阿贝耳完成，这已在牛顿之后整整一个半世纪了。[2]

---

〔1〕D.E. Smith, History of Mathematics (1923) p. 514.

〔2〕阿贝耳的著名论文"Untersuchungen über die Reihe

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots"$$

（原为法文，发表时用德文）发表于"Journal für die reine und angewandte Mathematik"（有时简称Crelle杂志）。在这篇论文中，他指出柯西关于级数收敛问题的一个错误。英译文见D.E. Smith, A Source Book in Mathematics(1959) pp.286—291.

在笛卡儿《几何学》中还出现历史上第一个平方根符号$\sqrt{}$。在原书第一版p.299上写道：

"如果我想求a^2+b^2的平方根，就写作$\sqrt{a^2+b^2}$，如果想求a^3-b^3+abb的立方根，则写作$\sqrt{c.a^3-b^3+abb}$。"

18世纪有些学者（如欧拉）猜想$\surd$是radix （拉丁文的根字）的字头r的变形，后来经过仔细研究，证明不是。原来德国人在1480年前后，用一个点·来表示平方根，如 .3 就是3的平方根，••表示4次方根，•••表示立方根。到16世纪初小点带上一条尾巴变成$\surd$，可能是写快时带上的。1525年路多尔夫的代数书用$\surd 8$，w$\surd$8，ww$\surd$8表示$\sqrt{8}$，$\sqrt[4]{8}$，$\sqrt[3]{8}$。

如果被开方数有好几项，为了避免混淆，笛卡儿用括线把这几项连起来，前面放上根号$\surd$（比路多尔夫的根号多一个小钩），就成为现在的根号形式。

现在的立方根符号出现得很晚，一直到18世纪才在一些书中看到。例如哈顿(Edward Hatton)1721年使用$\sqrt[3]{}$，$\sqrt[4]{}$，$\sqrt[5]{}$；卢培(De la Loubère)1732年用$\sqrt[3]{25}$，以后才渐渐通行。

第四节 近世代数

近世代数是对古典代数来说的，古典代数基本上就是方程论，因为它的内容是以讨论方程的解法为中心的。

随着方程论的进展，数系逐步扩大，有了复数系，解方程问题基本上已经解决。但数系仍然不断地扩大，由通常的数系出发，得到象哈密顿(William Rowan Hamilton, 1805.8.3

—1865.9.2，爱尔兰人）的四元数等不完全满足通常运算法则的对象。[1]

另一方面，由于一元方程根式求解条件的探究，引进了群的概念．群论的萌芽，最早出现在拉格朗日的著作（1770，1771）中，他证明5次方程的预解式是6次方程．[2]鲁非尼证明一般的5次以上的方程不能用根式求解（1799），也引进了群论的思想．不过他的证明并不十分严格．到阿贝耳才给出这论题的严格证明（1824）．



阿贝尔(Abel)

阿贝耳(Niels Henrik Abel 1802.8.5—1829.4.6)[3]是一个遭遇不幸的青年．生于挪威克利斯安那(Christiana)[4]附近的芬多（Findöe）．

阿贝耳的父亲是村子里的基督教牧师，家境贫困．学校里不得法的教育方法没有使阿贝耳对学业感到兴趣．15岁时，他幸运地遇到一位优秀的教师洪保(Bernt Michael Holmboë，1795—1850）．在他耐心细

〔1〕参考段学复《谈谈近世代数学》，载《天津大公报》(1947.6.11)．

〔2〕F.Cajori，A History of Mathematics(1919) p.253，p.350．

〔3〕传记见E.T.Bell，Men of Mathematics(1937) pp.307—326．

〔4〕挪威首都奥斯陆(Oslo)的旧名．

致的教导下，激发起阿贝耳学数学的强烈愿望．阿贝耳从16岁开始，自学了许多当代名家的数学著作．1821年（19岁）进入克利斯安那大学，在数学上取得了很大的成绩．阿贝耳一生中得到洪保很多帮助，包括资助他到欧洲大陆去求职．阿贝耳去世后，洪保为他校订出版论文集（1839）．

自从16世纪3、4次方程得到解决之后，5次以上方程的根式求解问题自然便提到议事日程上来．它吸引着众多的数学家．但是两百多年的努力都落空了．无数次的失败使人们悟到它的不可能性．在拉格朗日和鲁非尼之后，阿贝耳进一步严格地证明一般5次方程不可能用根式求解，[1] 开辟了近世代数方程论的道路，包括群论和方程的超越函数解法．

阿贝耳的论文《论代数方程，证明一般5次方程的不可解性》(Mémoire sur les équations algébriques ou l'on démontre l'impossibilité de la resolution de l'équation générale du cinquième degré) 1824年以小册子的形式刊行于克利斯安那，1826年更详细地发表于《克列尔（Crelle）杂志》第1卷．[2]

1825年阿贝耳到欧洲大陆，准备继续深造及谋求职位．他拜访了好几位有名望的数学家和天文学家，但都没有得到应有的重视．他曾将5次方程不可解的小册子寄给格廷根的高斯，也未引起高斯的注意．这一冷遇使得他没有到格廷根去．

他在德国认识了克列尔(August Leopold Crelle, 1780.

[1] 即对于5次方程$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$，不可能用根式将x表示为系数a，b，…，e的函数．

[2] 英译文见D.E. Smith, A Source Book in Mathematics (1959) pp. 261—266.

3.11—1855.10.6)，这是阿贝耳一生中第二个对他的事业有极大帮助的人．克列尔原先是一个工程师和建筑师，在阿贝耳和斯太纳的建议下，于1826年创办了《理论与应用数学杂志》(Journal für die reine und angewandte Mathematik)，常简称为《克列尔杂志》．一直出版到现在，是历史最悠久的数学杂志之一．

《克列尔杂志》头三卷发表了阿贝耳22篇包括方程论、无穷级数、椭圆函数论等方面开创性的论文和斯太纳的论文．这使得欧洲大陆开始注意阿贝耳的工作，反过来，阿贝耳出色的论文也使《克列尔杂志》后来获得永恒的声誉．

阿贝耳在大陆上没有取得合适的职位，经济的拮窘使他在1827年5月回到挪威．一年多之后，在贫病交迫中于阿伦达尔(Arendal，挪威南端)郁郁去世．死后两天，克列尔来信通知他已被柏林大学任命为数学教授．

阿贝耳和另一个青年伽罗瓦是近世代数的真正创始者．伽罗瓦(Évariste Galois, 1811.10.25—1832.5.31) 生于巴黎附近布拉伦(Bourg-la-Reine) 的小村子里．他短暂的一生充满了悲伤和苦恼，景况比阿贝耳更坏．[1]

伽罗瓦12岁才进入巴黎的路易勒格朗(Louis-le-Grand)公立中学，在这以前，他是在母亲的辅导下学习的．起先，他不见重于师长，甚至被说成是笨蛋．

1828年(17岁)是他关键的一年，伽罗瓦遇到了数学教师里沙(Louis-Paul-Émile Richard, 1795—1849)．里沙不是一个

---

〔1〕传记见E.T. Bell, Men of Mathematics(1937) pp.362—377．另见秉航《纪念伽罗华诞生150周年》，载《数学通报》(1961.7) p.39．



伽罗瓦(Galois)

普通的教书匠，他利用业余时间到巴黎大学听课，使自己的水平跟上时代的步伐，并把新的知识传授给学生们．里沙有很高的才能，好心的朋友们劝他从事著作，他却把全副精力倾注在学生身上．19世纪法国有好几个杰出的数学家出自他的门下，这就是对他的最高奖赏．

伽罗瓦在里沙的指导下研究代数方程论，开始取得了具有划时代意义的成果．他引入代换群彻底解决了代数方程的根式可解条件问题，开辟了代数学的一个崭新的领域——群论．[1] 里沙很快就发现了伽罗瓦的才能，说他是“法国的阿贝耳”，宣称伽罗瓦应该免试进入巴黎理工科大学．

可是事与愿违，由于不能满足主考人琐碎的苛刻要求，伽罗瓦两次考理工科大学都未被录取．后来进了师范学院．

柯西是当时法国首屈一指的数学家．他一向是很干脆和公正的，但偶然的疏忽却带来了损失．第一件事是对阿贝耳没有给予足够的重视，第二件事是伽罗瓦向科学院送交论文时，未能及时作出评价，后来连手稿也遗失了．

---

〔1〕通俗介绍见L.R. Lieber《伽罗华与群论》(Galois and the Theory of Groups) (1936).

伽罗瓦数次提交论文都没有结果．最后一次得到泊松草率的评语"不可理解的(incompréhensible)"．

1831年5月，伽罗瓦参加法国资产阶级革命活动，[1]被逮捕入狱．不久获释．7月14日，第二次被捕，关在监狱直到1832年4月29日．恢复自由没有多久，便因为政治和爱情的纠葛在一次决斗中被打死了．

1832年5月29日晚，这是一个不平静的夜．伽罗瓦预料自己难以摆脱死亡的命运，连夜给朋友写了几封信．他惟恐"广陵散从此绝响"，[2]仓卒将生平的数学研究心得扼要写出，并附以论文手稿，寄给朋友舍瓦利叶(Auguste Chevalier)．信中说："我在分析方面作出一些新发现．有些是关于方程论的．有些是整函数的．……公开请求雅可比或高斯，不是对于这些定理的正确性而是对于它的重要性发表意见．其次，我希望将来有人发现消除所有这些混乱对他们是有益的．"[3]

第二天一早，进行了决斗，伽罗瓦倒下了．一个路过的农民送他到医院，次日（1832.5.31）凌晨，伽罗瓦不到21岁就结束了生命．正如他自己在最后的信中所说："请原谅我不是为国牺牲．……我是为一些微不足道的事而死的．"

按照伽罗瓦的遗愿，舍瓦利叶将他的信发表在《百科评

〔1〕1830年7月，巴黎人民举行反对复辟王朝的武装起义，史称"法国七月革命"．校长怕出事，把伽罗瓦关在学校里不许出来活动．

〔2〕"广陵散"是三国时文学家、音乐家嵇康(223—262)所作乐曲，生前秘不传人．后为司马昭所杀，临刑前索琴弹之，说："广陵散从兹绝矣．"

〔3〕这封信的英译文见D.E. Smith, A Source Book in Mathematics (1959) pp.278—285.

论》(Revue encyclopédique,1832)中. 而他的主要论文《论方程的根式可解性条件》(Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux) 直到14年之后(1846),才在刘维尔(Joseph Liouville, 1809. 3. 24—1882.9.8)主办的刊物《纯粹与应用数学杂志》(Journal de Mathématiques Pures et Appliquées)上发表. 刘维尔并作序向数学界推荐.

群论的出现,具有重大的意义. 这时方程论已不是代数学的全部了,它渐渐转向代数结构本身的研究. 向着代数数论、超复数系、线性代数、环论、域论等新的方向发展,不断地渗透到各个数学部门中去.

代数数论可以溯源于高斯的研究(1801),以后经狄利克雷,克罗内克(Leopold kronecker,1823.12.7—1891.12.29,德国人)和近代的希耳伯特等人发扬光大.

线性代数是从线性方程组论、行列式论和矩阵论中产生出来的,它在代数的各个分支中就应用的广泛性来说要居第一位. 在历史上首先应归功于西勒维斯特(James Joseph Sylvester,1814.9.3—1897.3.15,英国人)和凯莱,以后有皮尔斯父子(Benjamin Peirce, 1809.4.4—1880.10.6; Charles S. Peirce, 1839—1914, 美国人)和狄克生(Leonard Eugene Dickson, 1874.1.22—1954.1.17, 美国人)等人的工作.

超复数系由哈密顿、格拉斯曼启其端,以后夫罗贝纽斯(Georg Frobenius, 1849.10.26—1917. 8. 3, 德国人)、嘉当、韦得柏恩(Joseph Henry Maclagan Wedderburn, 1882.2.26—1948.10.9, 苏格兰人)等也有很多建树.[1]

〔1〕E.T.Bell,The Development of Mathematics(1945)pp.250—251.



李(Lie)

群论方面，约当1870年作了重要的推进。不久李(Sophus Lie,1842.12.17—1899.2.18,挪威人)建立了连续群论（1873年起），开辟了代数学的另一分支 —— 李群与李代数。他的工作后来为嘉当所丰富。近年来格论，代数几何，拓扑代数等方向也有蓬勃的发展。



诺特(E.Noether)

总的来说，19世纪中叶特别是20世纪以来，代数的对象不断扩大，出现了一系列新的代数领域，研究方法也发生了巨大的变革。代数学从古典代数以方程为中心转变为以研究各种代数结构的性质为中心。在多数的场合下，代数理论只研究代数运算本身的性质，而不管对之施行运算的对象的具体属性。这种新观点是本世纪才形成的。德国女数学家诺特（Amalie Emmy Noether,1882.3.23—1935.4.14)在这方面起了很大的作用.[1]

〔1〕O.Ю. Шмидт等《代数》(алгебра)，邓应生译(1959)，《苏联大百科全书》2卷.

第七章　三角学

"三角学"一词，来自希腊文τρîγωνον(三角形)与μετρεîν(测量)，原意是三角形的测量，也就是解三角形．这是三角学的基本问题之一．后来范围逐渐扩大，成为研究三角函数及其应用的一个数学科目．

和其他科学一样，三角学是在解决实际问题的过程中发展起来的．它的发展和天文学、几何学有着不可分割的关系．早期的三角学是隶属于天文学的．天文学的发生是由于编制历法的需要，而历法对于农业和畜牧业都是极其重要的．

三角学的发展，大体可以分为三个时期．

第一期是从远古到11世纪以前．在这一时期，数学著作还看不到角的函数的概念，甚至一般地没有提出三角形中角与边之间的关系．但人们能够利用当时已知的几何知识，解决三角学范围内的一些问题．根据正多边形边长与外接圆半径的关系，计算弧的长度，这是解决三角问题的主要方法．

第二期是从11世纪到18世纪．三角学脱离天文学而独立，成为数学的一个分支．在这一时期里编制了大量的三角函数表．从第一期到第二期的过渡，主要发生在中亚细亚地区．

第三期是18世纪以后．以欧拉的《无穷小分析引论》为代表，讨论三角形的三角学进一步演变成为研究三角函数的、属于分析学的一个分支．

第一节 希　腊

古代埃及人建造金字塔，表明他们有一定的几何、三角知识．后来希腊学者塔利斯游埃及，利用相似三角形的道理测出金字塔的高．这是西方三角测量的滥觞，虽然和我国陈子测日法比较起来，还略逊一筹．

西方三角学的最早奠基者是依巴谷(Hipparchus, Ἵππαρχος)，约公元前180年生于小亚细亚的比西尼亚（Bithynia)，在今土耳其西北角的阿达帕扎勒（Adapazari）附近，约公元前125年卒．他是古希腊天文学家，以发现“岁差”著称．岁差就是春分点（或冬至点）在黄道上每年约逆行50″的现象．[1] 他是仔细比较一个半世纪前提莫恰里斯（Timocharis, 约公元前290年）关于角宿一（Spica，即室女座 α 星）的观测记录才发现这个现象的．[2] 可见那时他已采用了经纬度来表示天球上星的位置，开后世坐标制的先河．另一方面，也说明当时已有相当精密的观测．他曾绘制了一张包含850个恒星的星图表．

早期的三角学，是伴随着天文学而产生的．依巴谷为了天

---

〔1〕主要原因是日、月加力于地球赤道的肿胀部分，使地轴以垂直于黄道面的方向为轴，作描画圆锥面的运动，周期约26000年．这种运动表现为天球北极的年年变更．公元前3000年是右枢（天龙座α），现在是勾陈一（小熊座α，俗称北极星）．

〔2〕Thomas Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I (1921) p. 254. Gérard de Vaucouleurs《天文学简史》李晓舫译，(1959) p. 13.

文观测的需要，作了一个和现今三角函数表相仿的“弦表”，就是在固定的圆内，不同圆心角所对弦长的表．相当于现在圆心角一半的正弦线的两倍．可惜这表没有保存下来．

一般几何教科书中的“托勒密定理”（圆内接四边形两对角线所包的矩形等于两组对边所包矩形之和），实出自依巴谷之手，托勒密只是从他的书中摘出．从这定理可以推出正弦、余弦的和差公式及一系列的三角恒等式．

托勒密（Ptolemy 或 Claudius Ptolemæus, *Πτολεμαῖος Κλαύδιος*，约公元85—165年） 是古代天文学的集大成者．他继承前贤特别是依巴谷的成就，加以整理发挥，编入他的《天文集》（Almagest） 13卷中．这书原名是《数学论集》（*Μαθηματικῆς Συντάξεως βιβλία ιγ*），后来译成阿拉伯文，再转译成拉丁文，变成Almagest 的书名．[1]《天文集》是亚历山大学派或整个古代天文学的总结，它的基本理论是地球中心说．

这书包括从 0° 到90° 每隔半度的弦表，其作用相当于从 0°到90°每隔1/4°的正弦函数表．

值得注意的是，托勒密采用巴比伦人的60进制，把圆周分为360°．另一方面，又将半径分为 60 等份，每一份分为 60 小份，每一小份再分为更小的份，以此类推．把这些小份依次叫做“第一小份”（拉丁文partes minutœ primœ），“第二小份”（partes minutœ secundœ）．后来“小”变成了“分”

---

〔1〕 T.Heath, A History of Greek Mathematics, vol. Ⅱ (1921) p.273.

(minute)，“第二”变成了“秒”(second)，[1] 这就是“分、秒”名称的来源。[2]

用 ° ′ ″ 表示度、分、秒，是1570年卡拉木（Johann Caramuel）开始的。这已在托勒密之后1400年了。[3]

托勒密取半径的1/60作为长度的单位，例如60°的弦长是60^p（60个单位长，和半径相等），对90°的弦长是$\sqrt{2}\,60^p$或$84^p51'10''$。

他利用圆内接正五边形和十边形的边长推导对36°与72°的弦长。其他的弦长，根据“托勒密定理”来推导。实质上托勒密已经得到与下列公式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y,$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x)$$

等价的关系。

托勒密独出心裁地根据不等式

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\pi}{2}>\alpha>\beta\right)$$

来作内插计算。[4]

托勒密定半径为60个单位，后来印度人定半径为3438（一弧度等于3437′.74677…，约为3438′），中亚细亚民族定半径为

---

〔1〕现在英文里minute 这个字仍然有“分”和“微小”两种意义，second 这个字有“秒”和“第二”两种意义。

〔2〕F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p.47.

〔3〕F.Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1929) p. 146.

〔4〕J.F.Scott, A History of Mathematics (1958) p. 49.

150，纳皮尔定半径为10^7。一直到欧拉，才定半径为1，开始用线段的比值作为三角函数的定义。在这以前，三角函数实际上是在固定半径的圆内各函数线的长。

梅内劳斯的《球面论》由于译成阿拉伯文而保存了下来。这书着重讨论球面三角的性质。得到若干属于直角球面三角形的解法公式。

公元4世纪以后，希腊数学已成强弩之末。欧洲中世纪（5世纪以后）三角学和其他科学一样停滞不前。但在别的地区（印度、中亚细亚等）却有相当可观的进展。

第二节 印 度

阿利耶毗陀（Āryabhaṭa，约公元476—550年）是我们知道的最早印度数学家。他生于恒河南岸的巴连弗邑，或拘苏摩补罗（Kusumapura），在今印度东北部的巴特那（Patna）附近。[1]

他所著的书叫《阿利耶毗陀历书》（Āryabhaṭīya），包括《天文表集》(Gītikā)，《算术》(Ganita)，《时间的度量》(Kālakriyā)，《球》(Gola) 等部分。

〔1〕这地方有很多典故。它是摩揭陀国(Magadha，公元前5世纪印度北部最大国)的古都，后来有名的"孔雀王朝"(公元前4—2世纪)也建都在这里。我国有名的僧人法显（约334—420）到印度参拜佛迹，曾在巴连弗邑逗留三年(405—407)。7世纪的玄奘（602—664，唐僧或三藏法师）在城北的那烂陀寺(Nalanda)也先后住了十年。那时中印文化已有很多交流。参考贺昌群《古代西域交通与法显印度巡礼》，(1956)。郭圣铭《世界古代史简编》(1955)。

阿利耶毗陀指出圆周率之值："100 加 4 再乘 8，再加 62000，就得到直径是 20000 的圆周长近似值。" 即 $\pi = \frac{104 \times 8 + 62000}{20000} = 3.1416$。这圆周率是否得自中国的 $\pi = \frac{3927}{1250}$，尚待探讨。3、4 世纪时中国僧人到印度去寻求佛经的逐渐增多。5 世纪初法显以后中印交通更加频繁，我们有理由相信某些科学知识会流传到印度去。从时间上说，阿利耶毗陀比祖冲之晚生47年，比刘徽晚两个多世纪，大有借鉴的可能。

阿利耶毗陀对三角学的贡献很大。他制作一个正弦表，依照巴比伦人和希腊人的习惯，将圆周分为 360 度。每度分为60分，整个圆周分为21600分。再由 $2\pi r = 21600$，可得半径 $r = 3437.746\cdots$，略去小数部分，取近似值得 $r = 3438$。依此计算第一象限内每隔 $3°45'$ 的正弦长。如 $\sin 30° = 1719$，$\sin 45° = 2431$ 等。[1]

这和希腊的托勒密有显著的不同。阿利耶毗陀默认曲线与直线可用同一单位来度量。托勒密对这一点是犹豫不决的。他定半径为60个单位，是沿用60进制的习惯，和圆周长没有关系。也就是说，量弧长与量弦长、量半径的单位是不同的。但印度人则认为圆弧与弦长应用同一单位来度量。整个圆周是21600个单位（分），那么半径就应该是 3438 个单位。这里包含着弧度制的思想。弧度制的精髓，就是统一度量弧长与半径的单位。

在同一个问题中采用两种不同的单位是很不方便的。如果有人给出一张桌子的尺寸：长是1.23米，宽是2.56英尺，我们

〔1〕F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p. 96.

一定说他自找麻烦．然而写出$\sin 30^\circ = 0.5$这样的式子却习以为常，甚至还认为是理所当然的．实际上左端的30°可以看作弧长（角度也是用弧长来度量的），它是以圆周长的$\frac{1}{360}$作单位的；而右端的0.5可以看作正弦线的长，它是以半径作单位的．

60进制只是巴比伦遗留给我们的一种习惯，并不是很理想的制度．60这个数是2，3，4，5，6，10，12，15，30这些常见数的倍数，但却没有给我们带来多大的便利．例如一个直角的1/4或1/5就不是整数．弧度制量弧和量弦一律用半径作单位，这和印度人定半径为3438精神是一致的．

印度人和希腊人另一个不同的地方，是计算半弦（相当于现在的正弦线）而不是全弦的长．

阿利耶毗陀称半弦（或全弦）为jîva，是猎人的弓弦的意思．[1]后来印度的书大量译成阿拉伯文，这个字音译成dsch-îba，后来辗转传抄，误成形状相似的dschaib，意思是胸膛、海湾或凹处．12世纪时，提佛利（意大利中部，在罗马之东）地方的柏拉图(Plato of Tivoli)将这个字意译成拉丁文sinus，这就是"正弦"一词的来源．它和当初印度人弓弦的意义已相去甚远．

1631年邓玉函与汤若望等人编的《大测》一书，译sinus为"正半弦"或"前半弦"，简称为"正弦"，这是我国"正

[1] V.Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p. 295. F. Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p. 124.

弦”这一术语的由来。[1]

印度人还用到正矢 (versine) 及余弦。根据简单的理论作成每隔3°45′的正弦表。方法是用勾股定理算出特殊角30°, 45°, 60°, 90°的正弦之后，再用半角公式计算较小角度的正弦。

婆什迦罗是10到16世纪印度最负盛名的数学家和天文学家，他曾给出[2]

$$\sin 3°45' = \frac{100}{1529},^{[3]} \qquad \cos 3°45' = \frac{466}{467}.$$

值得注意的是466/467是 $\cos 3°45' = 0.997858923$ 的一个渐近分数。[4] 但

$$\frac{100}{1529} = 0.0654022237$$

却不是 $\sin 3°45' = 0.0654031292$ 的渐近分数。

第三节　中亚细亚

8世纪中叶，大食帝国分裂为东大食和西大食。东大食以巴格达为首都，西大食以西班牙的哥尔多瓦 (Cordoba) 为首

〔1〕白尚恕《介绍我国第一部三角学—“大测”》，载《数学通报》(1963.2) p. 48。

〔2〕П.Я.Кожеуров《三角学教程》，李荣涤译(1953) pp. 234—242，《三角学的发展简史》。

〔3〕一说他给出的数值是100/1528，此值误差甚大。J. F.Scott, A History of Mathematics (1958) p. 51.

〔4〕即不存在这样的分数，分母既不超过467，而又比466/467更接近cos 3°45′。

都．这时期著名的哈里发[1]有阿尔曼苏（Al-Mansûr, 712—775），阿尔马蒙（Al-Mâmûm,786—833）等．他们是科学的热心提倡者．在他们的大力支持下，吸收了东方的印度和西方希腊的文化精华，出现了以巴格达为首的学术中心．

阿尔马蒙在巴格达罗致名师，建立科学宫、观象台，亲自参加观测，研究风气大盛．在他的领导下，在美索不达米亚进行了两次大地测量（814），目的是确定子午线的长度，所得的结果相当精确．[2]不过这次子午线实测已在我国南宫说(725)测量之后90年了．

阿尔马蒙在君士坦丁堡那里得到大量的希腊哲学、医学、数学、天文的手稿，陆续译成阿拉伯文．另一方面，印度的占星学、数学和医学也流入了巴格达．

这时期居住在中亚细亚的各个民族出现了许多数学家．[3]除了代数方面的阿尔·花拉子模（他曾参与子午线的测量）外，在三角方面贡献最大的可以说是阿尔·巴坦尼（Al-Battânî, 850? —929）．[4]他是两河流域巴坦（Battan）地方的人，于是由此得名．

阿尔·巴坦尼是著名的天文学家，积40年（878—918）实测的经验，著《星的科学》(De scientia stellarum) 一书．[5]

---

〔1〕caliph，伊斯兰教国家政教合一的领袖的称号．

〔2〕F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p. 102. 马坚《阿拉伯文化在世界文化史上的地位》，载《新华半月刊》(1956) 5号 p. 172. 竺可祯《中国古代在天文学上的伟大贡献》，载《科学通报》2卷3期 (1951) pp. 217—218. 陈遵妫《中国古代天文学简史》(1955) p. 118.

〔3〕И.Депман, Из истории математики (1950).

〔4〕拉丁拼法是Albategnius. 阮元《畴人传》(1799) 卷43译作亚尔累德、亚耳罢德、亚耳巴德．

〔5〕F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p. 105.

定出较精密的黄赤交角及岁差的值，又测得地球远日点的运动。[1] 后来哥白尼轰动一时的《天体运行论》(De Orbium Coelestium Revolutionibus, 1543) 还常常引用阿尔·巴坦尼的实测数值。[2]

《星的科学》的拉丁文译本将阿拉伯文的dschaib(弯凹)意译成sinus，这就是“正弦” (sine) 一词的由来。

阿尔·巴坦尼深知托勒密的天文学，但采用半弦代替托勒密的全弦，这显然是受印度人的影响，在运算和命题方面也有这种影响．希腊人喜欢用几何方法，而阿尔·巴坦尼则常用代数方法．他从$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=D$的式子推得$\sin\theta=\frac{D}{\sqrt{1+D^2}}$，借此求出$\theta$ 的值，这是希腊人所不知道的．他还发现了重要的球面三角余弦定律：

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

阿尔·巴坦尼树立一根杆子在地上，求日影长 b，以测定太阳的仰角．阴影b的拉丁译名叫“直阴影”(Umbra extensa, 后改为umbra recta)，而水平插在墙上的杆投影在墙上的影长叫做“反阴影” (Umbra versa)．“直阴影”后来变成“余切”(cotangent)，“反阴影”叫做“正切”(tangent)．920年左右，阿尔·巴坦尼造出自 0°到90°相隔 1°的余切表。

另一个三角学者是阿布尔·威发 (Abû'l-Wefâ, Абуль-Вефа, 940—998)，他是霍腊散 (Chorassan, 今伊朗东北部) 的布山 (Buzshan) 地方的人．也是著名的天文学家．

〔1〕朱文鑫《天文学小史》(上) (1935) p. 109.

〔2〕马坚《阿拉伯文化在世界文化史上的地位》，载《新华半月刊》(1956) 5号 p. 172.

他发现月球的“二均差” (variation of moon)，这一发现往往被认为是600年后第谷（Tycho Brahe,1546—1601，丹麦大天文学家）的功劳。

阿布尔·威发计算了每隔10′的正弦和正切表。并首次引入正割与余割，可惜这新的函数没有唤起当代人的注意。

奇怪的是，阿布尔·威发的书完全不用印度数码。这样著名的学者为什么不用方便的印度数码呢？至今还是一个谜。猜想当时的数学家分为两派，一派崇尚印度，一派趋附希腊，后者排斥印度数码，阿布尔·威发属于这一派。

阿布尔·威发在几何方面也有成就，曾用几何方法去解方程 $x^4+ax^3=b$。

11世纪以后，中亚细亚地区发生了一系列的变乱，1096到1270年的十字军[1]东侵带来了流血战争。13世纪初又遭受成吉思汗（1155—1227）的侵略。1256年成吉思汗之孙旭烈兀（Hûlâgû，Хулагу）进攻伊朗高原，1258年占领了巴格达，严重摧毁了这一城市。在这兵祸连年的岁月里，科学的停滞是不足为奇的。无论如何，这时期仍然屹立着一些卓越的学者。

阿塞拜疆的大天文家纳速拉丁（Nasîr Eddîn，Насирэддин，1201—1274）是土斯（Tûs）地方的人。很得旭烈兀的信任。旭烈兀接受了他的建议，1259年在马腊格（Maragheh）[2]建造一所巨大的天文台，[3]其中有优良的仪器。纳速拉丁积十余

[1] 在罗马教皇的扇动下，西欧封建主、大商人以从“异教徒”手中夺回圣地耶路撒冷为号召的侵略军。

[2] 今伊朗西北角乌米亚湖(Lake Urmia)东南。

[3] 李俨《中国算学史》(1955) p. 140. 另参考 Б.А.Розенфельд《纳速拉丁·徒思在数学方面的工作》，杜石然译，《科学史集刊》(1958) 1期。

年的观测，编成《伊儿汗历》(Zidj Ilkhani)．旭烈兀从中国带了几个天文家到伊朗去，纳速拉丁从这里知道中国的历法．

纳速拉丁是很全面的学者，著有三角、天文、几何、星盘(astrolabe)等方面的书．

三角方面，纳速拉丁指出，由球面三角形的三个角，可以求得三边，或由三边去求三个角．这个事实可以作为平面三角与球面三角差异的重要标志．在西欧直到里基奥蒙田纳斯才知道．

纳速拉丁和更早的阿夫拉 (Dschâbir ibn Aflah, 11世纪后半)[1] 开始使三角学脱离天文学而独立．而欧洲人直到15世纪才完成这同一工作．数学史家苏特 (Heinrich Suter, 1893) 感慨地说："假如15世纪欧洲的三角学者早知道他们的研究，不知还有没有插足的余地？"[2]

14世纪末叶，蒙古帝国崩溃以及随之而起的封建内乱时期，中亚细亚出现了一个跛子帖木儿 (Timur the Lame 或 Tamerlane, Tamburlaine, 1334—1405, 在战争中受伤成为跛子)，原是成吉思汗的后裔．他把察合台汗国原有的地方统一起来，向外扩展，建立帖木儿帝国，建都在撒马尔干 (Самарканд, 在今乌兹别克境东南部)．

帖木儿的孙子兀鲁伯 (Улугбек, Ulugh Beg, 1393—1449) 特别爱好天文．在未即王位时就在撒马尔干建立一座当时世界上规模最大的天文台．在他的宫廷和天文台中聚集了一

[1] 西班牙西南塞维尔(Seville) 地方的人．

[2] F.Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p. 131.

百多名学者，组织无与伦比的天文观测和数学用表的计算．他的正弦表精确到小数9位．又造0°到45°之间每隔1′，45°到90°之间每隔5′的正切表．[1]

在兀鲁伯的领导下，根据多年的观测，编制了《兀鲁伯恒星表》．牛津大学在印刷术的草创时期（1665）就翻印了这本恒星表，以后又在各国翻印多次，其世界声誉由此可见．

在兀鲁伯天文台中主要的领导人物是阿尔·卡西（Jemshîd al-Kâshî，Джемшид ал-Каши，约卒于1436）．1427年左右著《算术之钥》（Ключ арифметики，Key of arithmetic）和《圆周论》（Трактат об окружности，Treatise on the circumference）[2]．

在《圆周论》中，阿尔·卡西计算$3\cdot 2^{28}$边[3]内接与外切多边形的周长，求得圆周长与半径之比．在计算中同时采用60进制和10进小数两种记数法来互相校验．突破了祖冲之保持了几乎一千年的圆周率世界记录．他的光辉的成果是

$$2\pi = 6°16'59''28^{iii}1^{iv}34^{v}51^{vi}46^{vii}14^{viii}50^{ix}\text{（60进）}$$

$$2\pi = 6.283,185,307,179,586,5\text{（10进）}$$

即 $\pi = 3.141,592,653,589,793,25,$

有17位准确数字．这数值一直到1596年才被柯伦（Ludolf van Ceulen，1540.1.18—1610.12.31）超过，他求到小数后

---

〔1〕V. Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p. 296.

〔2〕此二书已由Б.А.Розенфельд等从阿拉伯文译成俄文．见阿拉伯文、俄文合订注释本Джемшид Гиясэддин ал-Каши，Ключ арифметики，Трактат об окружности，(1956，Москва)．

〔3〕$3\cdot 2^{28}=805,306,368$，原文误为800,335,168．俄译本已改正，见俄译本p. 446 注28．

20位。后来在1615年再求到小数后35位。[1]

总的来说，自7世纪到15世纪的数百年间，中亚细亚和近东的各个民族不但吸取和保存了希腊与印度的数学精华，而且大大地向前迈进，为世界的数学宝库添加了光彩。在三角学方面，他们引入了几种新的三角函数，建立平面三角与球面三角的若干公式，制造大量的三角函数表，更重要的是开始使三角学脱离天文学而独立。

第四节　欧　　洲

从1096年到1270年，历史上有连绵不断的十字军远征，表面上带有宗教性质，实际上是一种军事殖民侵略。欧洲的封建主企图通过远征掠夺富庶的东方城市。十字军的侵略战争是彻底失败了，然而却带来意想不到的后果。第一、加强了东西方的贸易，促进欧洲商业在地中海的发展，使意大利和法国南部一带成为经济中心；第二、欧洲人认识了东方的工农业技术，以及伊斯兰国家和拜占庭所保有的古代文化宝藏。我国的纸、火药、印刷术和罗盘这四大发明也跟着东西交通的发达传到了欧洲，这一切无疑给欧洲人很大的刺激。

12世纪初，欧洲人和东方文化接触以后，不满于现有的科学和哲学知识，想探求更深奥的学理.而那时欧洲的希腊书籍已不可多得，因而转向中亚细亚，去寻找阿拉伯文的珍藏。9世纪是伊斯兰国家的翻译世纪，他们风起云涌地将希腊、印度书译成阿拉伯文，而12世纪则是基督教欧洲的翻译世纪，大量的

---

[1] D.E.Smith, History of Mathematics, vol.Ⅰ(1923) p.331.

阿拉伯文书籍反过来译成拉丁文.

14世纪英国坎特伯雷(Cantebury)大主教布拉瓦丁(Thomas Bradwardine, 1290?—1349.8.26)是欧洲早期的三角学者. 他开始将正切〔他叫做"反阴影"(umbra versa)〕和余切〔叫做"直阴影"(umbra recta)〕引入三角计算中. 欧洲第一本有系统的三角学著者是德国的里基奥蒙田纳斯(Johannes Regiomontanus, 1436.6.6—1476.7.6),[1] 原名约翰·缪勒(Johnn Müller), 生于哥尼斯堡(Königsberg, 现苏联境内加里宁格勒)附近的安费德(Unfied).

他的名著《论一般三角形》(De triangulis omnimodis), 约完成于1464年. 正式使三角学脱离天文学而成为一个独立的科目. 这书包括平面三角与球面三角两部分.



里基奥蒙田纳斯(Regiomontanus)

历来三角函数表采用半径的长度不一. 托勒密令半径等于60, 印度人取半径等于3438. 里基奥蒙田纳斯为了求得更精密的值, 定半径$r = 600,000$. 后来造了一个更精密的正弦表, 定$r = 10^7$.

〔1〕他的名字旧译玉山若干〔钱宝琮《中国数学史》(1964) p. 244〕,今改音译.

《论一般三角形》除了记述三角定律和载有三角函数表而外，还讨论了一个新颖有趣的极大极小问题：天花板挂一垂直的杆，长10尺，下端离地面4尺，求在地面上找一点（或这点的轨迹）使对杆所张角度最大。[1]

14到16世纪末叶，历史上叫做“文艺复兴”时期，在西欧和中欧的国家里，开始产生了新的、资本主义的生产方式的因素。中世纪束缚人类自由思想发展的烦琐哲学和神学的教条、权威逐步被摧毁了.

随着哥仑布(Christopher Columbus, 1451—1506.6.22)地理上的大发现和星空观察的扩大，使托勒密与教会一致的地球中心说发生了根本的动摇。伟大的天文学家哥白尼(Nicholas Copernicus, 1473.2.19—1543.5.24）提倡地动说。他的弟子利提克斯（Georg Joachim Rhæticus, 1514.2.16—1576.12.4）[2]见到当时天文观测日益精密，推算详细的三角函数已为刻不容缓的事，于是令半径等10^{15}，作每隔10″的正弦、正切及正割表。

当时制表没有对数，更没有计算机，全凭手算，计算浩繁。利提克斯和他的助手们以坚忍不拔的意志勤奋地工作达12年之久。遗憾的是，不能在他生前完成，到1596年才由他的弟子鄂图（Valentinus Otto, 或 Valentin Otho, 1550？—1605，德国人）完成刊行于世。

---

〔1〕设AB为杆，正对地面上D点，作一圆通过A、B且与地面相切于C，则C即为所求之点。注意到DC是切线，故为DA及DB的比例中项，由此知$DC=\sqrt{56}$。

〔2〕德国人，哥白尼《天体运行论》就是由他负责出版印刷工作的。

鄂图就是西方第一个得到祖冲之密率 $\pi=\frac{355}{113}$的人．那是1573年，[1] 已在祖冲之之后1100年以上．

他是怎样得到这个圆周率的？这是一个有趣的问题．有人猜想他是调和阿基米德和托勒密的圆周率而得．

阿基米德的圆周率是$\frac{22}{7}$，而托勒密的圆周率用60进制记数法表示是$\pi=3\ \ 8'30''$[2]

$$3\ \ 8'30''=3+\frac{8}{60}+\frac{30}{60^2}=\frac{377}{120}=3.141\dot{6}.$$

鄂图的算法是

$$\frac{377-22}{120-7}=\frac{355}{113}\text{[3]}.$$

1613年海德堡（Heidelberg，德国西南）的彼提克斯（Bartholomäus Pitiscus，1561.8.24—1613.7.3）不辞劳苦地修订了利提克斯的函数表，重新出版．

到此为止，三角函数表已精密地算出．它的效用和必要性，要等到对数的发现之后才完全显露出来．

---

〔1〕鄂图也叫做Parthenopolitanus，是马格德堡（Magdeburg，现在德意志民主共和国境内）地方的人．见 D. E. Smith, History of Mathematics, vol. Ⅰ(1923) p. 340. 又F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p. 73. 二书均根据刊物 Eneström, Bibliotheca Mathematica(1885—1915, Leipzig) 第3辑13卷 (1913) p. 264.

〔2〕T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. Ⅰ(1921) p. 233.

〔3〕这种猜想出自杂志Scripta Mathematica, XⅡ (1953) No. 2—3, p. 219. 见A.П. Юшкевич《中国学者在数学领域中的成就》，赵孟养译，载《数学进展》(1956) 2卷2期，p.273.

在这以后直到18世纪中叶，三角学没有发生本质的变化。但还是有很多值得称道的工作。

首先是纳皮尔对数的发现（1614），它大大简化了三角计算。此外，韦达给出 $\sin n\phi$ 展开成 $\sin\phi$ 的公式。德莫瓦佛（Abraham de Moivre 1667.5.26—1754.11.27）给出公式：

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx,$$

这就是有名的“德莫瓦佛定理”。

德莫瓦佛，生于法国东北部的香槟（Champagne），1688年移居伦敦，以后就一直住在那里。他从1707年到1730年逐步深入地得知这公式在 n 是正有理数时成立。后来欧拉在1748、1749年证明 n 是实数时成立。他又给出著名的公式[1]（1748）：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

这个关系科兹（Roger Cotes，1682.7.10—1716.6.5）已经知道，他在1714年给出和它等价的公式

$$ix=\ln(\cos x+i\sin x).$$

这些工作都大大丰富了三角学的内容。

第五节　十八世纪以后

欧拉的《无穷小分析引论》[2]是一部划时代的著作，即使

〔1〕德莫瓦佛及欧拉的原始论文见D.E.Smith, A Source Book in Mathematics, vol. Ⅱ(1959) pp. 440—454.

〔2〕此书原为拉丁文，有俄文译本Е.Л.Пацановский,“Леонард Эйлер, Введение в Анализ Бесконечных”,(1961, Москва).

仅就三角学来说也是这样.

首先，欧拉提出三角函数是对应的函数线与圆半径的比值，这是他的重要功绩之一. 过去一直是以线段的长作为三角函数定义的. 他并令圆的半径为1，这使三角研究大为简化.

其次，欧拉引入了弧度制.[1] 欧拉认为如果半径是一个单位，那么半圆周的长就是π，所对中心角的正弦是0，即$\sin\pi=0$. 同样$\frac{1}{4}$圆周的长是$\frac{\pi}{2}$，所对中心角的正弦等于1，可记作$\sin\frac{\pi}{2}=1$.

引入了弧度制以后，就将度量直线段和圆弧的单位统一起来，大大简化了三角公式和计算.

"弧度" (radian) 一词，是汤姆生(James Thomson)首先使用的.[2]他在1873年6月5日在贝尔发斯特 (Belfast, 北爱尔兰首府) 的女王学院 (Queen's College) 的考题中创用了这个字.[3] 1881年哈尔斯特 (G.B.Halsted) 等用ρ表示弧度单位，如$\frac{3}{5}\pi\rho$ 表示$\frac{3}{5}\pi$ 弧度，1909年霍尔 (A.G.Hall) 等用R表示，如$\frac{\pi}{4}$弧度写成$\frac{\pi}{4}^{R}$，1907年包尔 (G.N.Bauer) 用r表示.[4] 直到1925年还有的书用π^{c}表示π弧度.[5]近年来

〔1〕《无穷小分析引论》第8章，俄译本 p. 109.

〔2〕可以猜想这是由radius (半径) 与angle (角) 两字变来. 仿此，radian以前曾译为"弪" (由弧与径两字合成)，见1935年《数学名词》. 近年来已不用.

〔3〕F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p. 484.

〔4〕F.Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1929) p. 147.

〔5〕S.L.Loney, Plane Trigonometry (1925) p. 11.

习惯把这个记号省略。

欧拉指出：

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\text{[1]},$$

并导出展开式

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots,\quad \cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots.$$

这具有重大的意义，它标志着三角学从研究三角形解法进一步转变为研究三角函数及其应用的一个分析学的分支。在复变函数论里，$\sin z$，$\cos z$（z 是复数）通常是用幂级数来定义的，它完全摆脱了几何的叙述，并独立于任何一种几何体系之外。

三角学输入我国，开始于明崇祯4年（1631）。这一年，邓玉函、汤若望与徐光启合编《大测》（1631年正月二十八日），这是我国第一部三角学。[2] 后来徐光启等人又编《测量全义》（1631年八月初一），其中有平面三角和球面三角的论述。那时三角学在欧洲还没有善本。

1877年，华蘅芳与英傅兰雅合译英海麻士(John Hymers, 1803—1877)《三角数理》，这是三角学第二次输入我国。

---

〔1〕这关系式在1743年的文章中已给出。Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) p. 409.

〔2〕李俨《中算史论丛》(三) (1955) p. 489.《大测》之名并不通行。薛风祚跟从穆尼阁学习数学，1653年合编《三角算法》，“三角”以后便取代“大测”成为这一科目的名称。见丁福保、周云青《四部总录算法编》(1956)补遗《中算书录》p.48。

第八章 解析几何

第一节 笛卡儿的《几何学》



笛卡儿(Descartes)

数学发展的第三个时期，是变量数学时期. 它以笛卡儿解析几何的建立为起点.

笛卡儿(René Descartes)，1596年3月31日[1]生于法国图朗(Touraine)[2]的小城拉哈(La Haye)[3]. 8岁时入拉夫雷士(La Flèche)的耶稣会(Jesuit)学校学习8年(1604—1612)，在那

〔1〕拉丁文拼作Renatus Cartesius,这是卡氏坐标(Cartesian coordinates)，卡氏空间(Cartesian space)等名称的由来. 笛卡儿旧译代伽德、戴加德，见清黄钟骏《畴人传四编》(1898)；又译作代加德、笛卡、笛卡尔、狄嘉尔等. 传记见《大英百科全书》(Encyclopaedia Britanica)9版Ⅶ卷(1877)pp. 115—128,及 E.T. Bell,Men of Mathematics(1937) Chap.3. 又见 C.C. Gillispie, Dictionary of Scientific Biography, vol. Ⅳ(1971)pp.51—65.

〔2〕法国西部省名.

〔3〕在图尔(Tours)附近.

里认识同学梅森（Marin Mersenne, 1588.9.8—1648.9.1，以后也是有名的数学家），成为密友．1612年去巴黎，准备完成学业．以后，和迈多治（Claude Mydorge，1585—1647）友善，共同研究数学．迈多治也是当时的名数学家，著有《光学》、《圆锥曲线》（1631）等书．

当时有一种风气，有志之士，不是致力于宗教（如梅森、帕斯卡）就是献身于军事．1617年5月间，笛卡儿到荷兰，投入奥伦治（Orange）公爵的军队中．那时正值战事停息，某日余暇，笛卡儿在布勒达（Breda，荷兰南部）的街市上散步，被一张荷兰文的招贴所吸引．他不懂荷兰文，便请求站在旁边的人译成拉丁文或法文给他看．这人正好是多特（Dort 或 Dordrecht，荷兰南部）学院的院长毕克门（Isaac Beeckman），他答应了这一请求．原来这张广告是当时数学家的一种挑战书，列有难题，广征答案．笛卡儿在数小时内求得解答，毕克门大为佩服．笛卡儿从此知道自己长于数学，开始有脱离军界，致力于数学的念头．

1619年笛卡儿在多瑙河畔的诺伊堡（Neuberg，德国南部慕尼黑之北）军营中．这是他一生的转折点．他终日沉迷在深思之中，考虑哲学和数学问题．1619年11月10日晚，他心中充满极大的兴奋，为的是“发现了一种不可思议的科学的基础”．他带着愉快而又焦急的心情去入睡，这使得他接连做噩梦，头脑久久不能平静．笛卡儿写道：“第二天，我开始懂得这惊人发现的基本原理．”[1] 这就是指他得到建立解析几何的线索．

〔1〕笛卡儿这时的心情，他自己有详细的描绘．E.T.Bell, Men of Mathematics（1937）p.39.

1621年，笛卡儿终于脱离了军队，到丹麦、荷兰、瑞士、意大利等地方游历.1625年回到巴黎，重遇旧友梅森和迈多治.这时笛沙格也加入他们的数学集团.

1628年底，笛卡儿觉得巴黎尘嚣过甚，于是移居荷兰，潜心钻研哲学数理.埋头著述20年之久.1649年，接受瑞典女王克利斯提娜（Christina, 1626—1689）的邀请，到斯德哥尔摩，不幸数月以后病逝（1650.2.11）.

在荷兰的头几年（1629—1633），完成了《宇宙论》（Le Monde）一书.这时他听说伽利略(Galileo Galilei, 1564.2.18—1642.1.8）因提倡地动说而被教庭判罪，笛卡儿为了避免争端，无意出版此书（以后到1664年才刊行）.于是转向《方法论》的创作.这书是用法文写的，1637年6月8日在莱顿出版.后面有三篇附录：（1）《折光学》（La Dioptrique）；（2）《论流星》（Les Météores）；（3）《几何学》（La Géométrie）.

最后这117页（pp.297—413）的《几何学》，[1]后世历史家把它作为解析几何学的起点.

当时"几何学"（géométrie）一词，并不专指现在的"几何"而言，它和"数学"是同义语.正象我国古代"算术"和"数学"是同义语一样.

《几何学》共分三卷.第一卷讨论尺规作图；第二卷是曲线的性质；第三卷是立体与"超立体"（plusque solides）的作图.第三卷实际是代数问题，探究方程的根的性质.其中论及方

〔1〕《几何学》有第一版的摹真与英译对照本 "The Geometry of René Descartes"（1954），David Eugene Smith, Martha L.Latham译注.

LA GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion: Ainſi n'a'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commēt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Pp eſt

图21 笛卡儿《几何学》第1卷第1页

程系数的符号和正负根个数的关系，这就是现在方程论中的“笛卡儿正负号规则”.

笛卡儿的中心思想是要建立起一种普遍的数学，使算术、代数和几何统一起来．他从自古已知的天文和地理的经纬制度出发，指出平面上的点和实数对(x, y)的对应关系．进一步考

虑二元方程 $F(x, y)=0$ 的性质，满足这方程的 x，y 值无穷多，当 x 变化时 y 值也跟着改变，x,y 不同的数值所确定平面上许多不同的点，便构成了一条曲线．这样，一个方程就可以通过几何的直观和方法去处理，反过来可以离开几何图形，用代数的方法研究曲线的性质．具有某种性质的点，其间有某种关系，“这关系可用一个方程来表示”（原书 319 页），这就是解析几何的基本思想．

笛卡儿把过去对立着的两个研究对象“形”和“数”统一起来，并在数学中引入“变量”，完成数学史上一项划时代的变革．恩格斯对笛卡儿的革新思想给予极高的评价：“数学中的转折点是笛卡儿的变数(Der Wendepunkt in der Mathematik war Descartes' variable Größe)．有了变数,运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，……”[1]又说：“在以牛顿和林耐(Carolus Linnaeus, 1707—1778)为标志的这一时期末，我们见到这些科学部门已经在某种程度上完成了．最重要的数学方法基本上被确定了，主要由笛卡儿制定了解析几何，由耐普尔制定了对数，……”[2]

实际上，笛卡儿引入了变量（或变数）的思想，但没有使用变量这一术语．他称一些量为“未知和未定的量”（quantités indeterminées & inconnues,英译为 unknown and indeterminate quantities),就相当于现在的变量．

我们看看笛卡儿是怎样引入坐标和变量的．

《几何学》第二卷pp．319—322，在说明曲线可以用方程来表示之后，举了这样一个例子（图22）．

〔1〕《自然辩证法》译本(1971)p.236.原文见(1959)柏林版 p.275.

〔2〕《自然辩证法》译本(1971) p.9.原本 (1959版) p. 10.

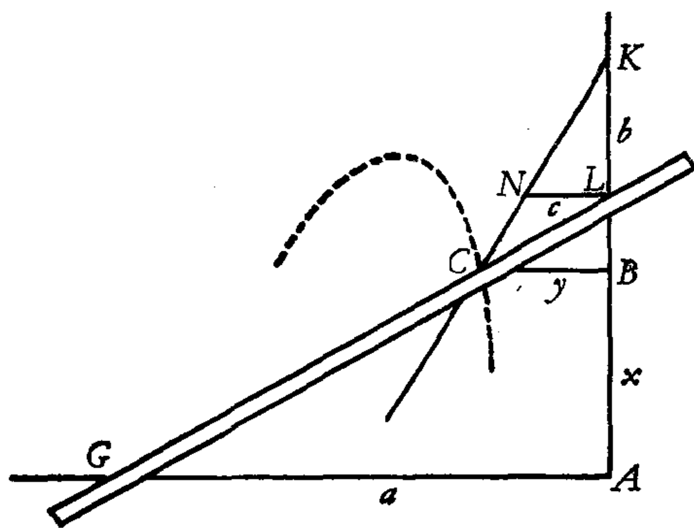


图 22

设直尺 GL 的一端固定在 G 点上，可以绕 G 点旋转．$AK \perp GA$，有一个三角板 CKB[1] 的边 BK 贴在 AK 直线上，上下移动．使直尺通过三角板 BK 边上的固定点 L，求 GL 与三角板 CK 边（或延长线）交点 C 的轨迹．

笛卡儿选择直线 AB 作为量度点的位置的标准，以 A 作为始点（用现代的术语来说就是以 AB 作坐标横轴，A 点作坐标原点）．

作 NL，$CB \parallel GA$，"因为 CB 和 BA 是两个未知和未定的量，我分别命它们为 y 和 x"．

又命 $GA=a$，$KL=b$，$NL=c$．因 $c:b=y:BK$，

故 $BK=\frac{b}{c}y$，$BL=\frac{b}{c}y-b$，$AL=x+\frac{b}{c}y-b$．

又 $CB:BL=y:\frac{b}{c}y-b=GA:AL=a:x+\frac{b}{c}y-b$，

故 $\frac{ab}{c}y-ab=xy+\frac{b}{c}y^2-by$，所求的轨迹方程是

$$y^2=cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac.$$

〔1〕原文是"直线平面图形 CNKL"．

笛卡儿说这是一条双曲线(hyperbole).

他没有引入第二条坐标轴，即Y轴．一百多年后，在克拉美（Gabriel Cramer，1704.7.31—1752.1.4 瑞士人）的《代数曲线分析引论》（Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques，1750）中才正式引入Y轴．但较早的欧拉等人偶然也用过Y轴．“横坐标”(abscissa)，“纵坐标”(ordinate)的名称笛卡儿也没有使用过．“纵坐标”在1694年为莱布尼兹所正式使用，而“横坐标”到18世纪才由沃尔夫(Christian von Wolf，1679—1754)等人引入．“坐标”(coördinatæ)一词，也是莱布尼兹在1692年首先创用的．

第二节 其他学者的贡献[1]

笛卡儿《几何学》的出版，立刻引起了学术界广泛的注意．和任何一种伟大学说或思想的诞生一样，由于和固有思想的矛盾和冲突，以及不可避免地带有某些新生的缺点，必然引起争论．

解析几何也是在百家争鸣的过程中成长起来的．当时法国的许多有名的数学家如费马、罗伯瓦、笛沙格各从不同的角度来批评笛卡儿在《几何学》中所用的方法．

实际上费马也独立得到解析几何的要旨，他求切线的方法和笛卡儿稍有不同，不过基本上都承认“切线是和曲线两个交点重合时的割线”．

笛卡儿《几何学》，作为一本解析几何的书来看，是非常

〔1〕解析几何的缘起及早期的发展见 Carl B. Boyer, The invention of analytic geometry, Scientific American (1949.1) pp. 40—45.

不完整的. 可贵的是引入了新的思想，为开辟数学新园地作出了贡献.

解析几何的产生也不是偶然的. 在笛卡儿之前已有许多学者在这方面作过努力. 如坐标制的思想就起源于远古的希腊[1]. 阿波罗尼斯研究圆锥曲线的时候，曾引用了两条正交直线，作为一种坐标[2].

在天文和地理方面，依巴谷明确指出一点的位置由两个坐标（经度和纬度）来确定. 到14世纪，奥力森（Nicole Oresme, 约1323—1382.7.11）[3]在他的书中陈述一种坐标几何，用坐标来确定点的位置. 这是从天文、地理坐标到近代坐标几何学的过渡. 他的书重印了好几次（从1482—1515），影响着文艺复兴以后包括笛卡儿在内的学者.

和笛卡儿同时代的费马(Pierre de Fermat)，分享着解析几何创立的荣誉. 费马1601年8月20日生于法国南部土鲁斯(Toulouse)附近的波蒙(Beaumont de Lomagne)[4]，1665.1.12卒于土鲁斯或卡斯特(Castres). 他是土鲁斯议会的议员. 除了机关的职务以外，他有丰富的法律知识，严格的清廉也很出名. 自然科学是业余学习的主要科目. 他是一个博览群籍，见多识广的学者，同时是精通各种文字的语言专家.

费马是一个业余数学家，虽然年近30岁才认真注意数学，

---

[1] 李约瑟认为我国早已有坐标的思想. 见《中国科学技术史》译本第3卷(1978) pp. 236—242.

[2] D.E. Smith, History of Mathematics (1923) p. 116.

[3] 法国西北部诺曼第(Normandy)地方的人，曾为主教.

[4] Encyclopaedia Britannica, vol. 9 (1964) p. 185. 别的书给出不同的生年，在1590至1608之间. 传记并见 C.C. Gillispie, Dictionary of Scientific Biography, vol. Ⅳ (1971) pp. 566—576.

但对数论、解析几何、概率论三方面都有重要贡献．他性情谦抑，好静成癖，对著述无意发表，所以生平除了少数片断而外，没有完整的著作行世．去世后，很多论述遗留在旧纸堆中，或书的边缘和空白处，书写年月已无从稽考，还有的保存在他给朋友的书信中．后人把它汇集成书，共两卷，在土鲁斯出版(1670, 1679)．第一卷有丢番图算术，带有校订和注解；第二卷包括抛物形求面积法，极大极小及重心的论述，和各类问题的解答．这些问题后来成为微积分的一部分，还有球切面，曲线求长等的讨论．另外就是他和笛卡儿、帕斯卡、罗伯瓦、惠更斯的通信录．这本书以后便罕见于世，直到1853年布拉兴(E. Brassinne)重新加以注释，在巴黎出版．

从费马的通信中，知道他在笛卡儿《几何学》出版之前，就已有解析几何的思想．和笛卡儿一样，提出用方程来表示曲线，并通过这方程的研究来推断曲线的性质．

费马写过关于解析几何的小文(这大概是在笛卡儿之前)，但直到1679年才发表出来．这里我们见到方程$y=mx$，$xy=k^2$，$x^2+y^2=a^2$，$x^2\pm a^2y^2=b^2$被指明为直线和圆锥曲线．从表面看来，这论文比笛卡儿的《几何学》古老一些，后者的符号是相当近代化的．或者说，我们现在还沿用着笛卡儿的符号．笛卡儿除了将a^2写成aa之外，其余的几乎和现在一样．

费马对笛卡儿的解析几何曾加非难，所争之点大多是笛卡儿立论晦涩之处，后来终于互相仰慕，成为好友．

和切线的研究相联系，费马在1638年发现求极大极小的方法，先使一代数方程的变数作微小的变动，然后使这变动消

失[1]．他还应用无穷小的思想到求积问题上去，这是微积分学的先声．

意大利的卡瓦列利也是解析几何与微积分的先驱者．他最先使用极坐标来求阿基米德螺线下的面积．格列哥利，瓦里能(Pierre Varignon，1654—1722．12．22) 也用过极坐标的方法．第一个将极坐标看作在平面上确定点的位置的方法是牛顿，他的兴趣集中于曲线在某种坐标系中给出时怎样去确定它的切线．[2]

近代对解析几何贡献最大的首推普吕克(Julius Plücker，1801.7.16—1868 5．22)[3]．他有好几种解析几何的著作，如《解析几何发展》(Analytisch-Geometrische Entwicklungen，1828—1831)，《解析几何系统》(System der Analytischen Geometrie，1835)等，对后世有很大的影响．

第三节　变量与函数

笛卡儿引入了坐标与变量，使数学发生了巨大的变革．但他没有使用变量这个词．

在数学上使用“变量”这个词，最早是约翰·贝努利(Johann

〔1〕费马的方法实际就是现在微分学里求局部极值的方法．即令$f'(x)=0$，解出 x，就得到极点．费马早在1629年就已想到这种方法，见于给罗伯瓦的一封信中．

〔2〕J.L. Coolidge, The Origin of Polar Coordinates, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (1952).

〔3〕参见 D.E. Smith《西洋近世数学小史》段育华等译(1931)第15章《解析几何》．又 Г. Вилейтнер, История математики от Декарта до середины XIX столетия (1960) p. 399，译自德文 H. Wieleitner, Geschichte der Mathematik (1921—1923).

Bernoulli，1667—1748）．1718年他写道："变量（variable）的函数就是变量和常量以任何方式组成的量．"[1]

变量也叫变数．汉语"变数"这个词，是李善兰最先使用的，他在《代微积拾级》的译本（1859）的序中说："中法之四元，即西法之代数也．……代数以甲、乙、丙、丁诸元代已知数，以天、地、人、物诸元代未知数．微分积分以甲、乙、丙、丁诸元代常数，以天、地、人、物诸元代变数．"

《代微积拾级》是"Analytical Geometry and Calculus"（解析几何与微积分）的译本．它是我国第一本解析几何的译本，也是第一本微积分的译本．当时解析几何译作"代数几何"，大概是因为内容是用代数方法研究几何之故[2]．后来潘慎文(Rev. A.P. Parker，1850—1924，美国人）和谢洪赉译罗密士的书，定名为《代形合参》（1893）[3]．这本书的前2卷就是《代微积拾级》的前9卷解析几何，第3卷是空间解析几何，附卷有各种应用题．"代形"是代数与形学（几何学的别名）的简称．后来也有叫"经纬几何"、"狄嘉尔形学"的，但不流行．1935年《数学名词》[4]确定为"解析几何学"，一直沿用到现在．

笛卡儿引入变量以后，随之而来的便是函数概念．虽然他也没有使用这个词．但两者的关系是如此的密切，它们在历史

〔1〕 F. Cajori, A History of Mathematics(1919) p. 211.

〔2〕 现代"代数几何"(algebraic geometry) 这一术语，指的是19世纪后半期发展起来的另一个数学分支．它是以代数流形为研究对象的．所谓代数流形是由空间坐标的一个或多个代数方程所确定的点的集合．参考 Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) pp.924—946.

〔3〕 上海美华书馆印行．是19世纪末至20世纪初颇流行的教科书．

〔4〕 国立编译馆编．

上是同时出现的．笛卡儿在指出 y 和 x 是变量（“未知和未定的量”）的时候，也注意到 y 依赖于 x 而变．这正是函数思想的萌芽．

“函数”（拉丁文 functio）这个词用作数学的术语，最早是莱布尼兹（1692）．[1] 但其涵义和现在不同，他指的是关于曲线上一点的一些线段的长（如横坐标、纵坐标、弦、切线、法线等）．

前面已经提到约翰·贝努利1718年给出函数的定义，同时第一次使用了变量这个词[2]．

客观事物在不断地发展变化，所以反映这些事物的概念也不可能一成不变．其次，人们认识事物也是由浅入深，由片面而全面的．“函数”这个概念也随着时代不断地发展变化．历史上每一个阶段，都有它相应的定义．

1748年欧拉在《无穷小分析引论》中将“解析表达式”(expressio analytica)定义为函数．欧拉写道：“变量的函数是一个解析表达式，它是由这个变量和一些常量以任何方式组成的．”[3]

但是欧拉有时又采用另一种更广泛的定义：“在 xy 平面

〔1〕参见藤原松三郎《微分积分学》第1卷 pp.81—82，643—644．另一说是1694，见 E.T. Bell, Men of Mathematics (1937) p. 98．又一说是1673年莱布尼兹的手稿上就已用这个词，而牛顿则用“流动量”(fluent 或 flowing quantity) 这个词来表示变量间的关系 (1665)．见 M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) pp. 339—340.

〔2〕他在1698年7月给莱布尼兹的信中已指出函数是“由一些变量和常量组成的量．”

〔3〕原文是拉丁文．此处根据俄文译本 Леонард Эйлер, Введение в Анализ Бесконечных, том Ⅰ (1961) p. 24.

上徒手画出来(libero manus ductu)的曲线所表示的 y 与 x 间的关系。”[1]

1775年，欧拉在《微分学》(Institutiones calculi differentialis) 中又给出另一种定义：“如果某些变量，以这样一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随之而变化，则将前面的变量称为后面变量的函数。”[2]

欧拉前后使用了三种定义：1．“解析表达式”；2．由曲线所确定的关系；3．“依赖变化”．用现代的眼光去看，都有一定的局限性．1、3两个定义容易理解，所以现在仍然被一些通俗的读物所采用．缺点在于过于狭窄，因为有许多函数是没有解析表达式的（尽管一般接触到的函数都可解析表达）．也有的函数并不随自变量 x 的变化而变化[3]．第2个颇接近现代定义，但嫌不够明确．不管怎样，欧拉定义对后世的影响极大．

我国“函数”一词，是《代微积拾级》首先使用的．[4] 在这本书中“function”译成“函数”，并给出定义：“凡此变数中函彼变数，则此为彼之函数．如直线之式为

地＝甲天丄乙　($y = Ax + B$)，

则地为天的函数．……如不明显天之函数，但指地为天之因变

---

[1] Felix Klein(1849.4.25—1925.6.22), Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, I (1908) p.438 (英译本Elementary mathematics from an advanced standpoint, p.200)关于函数概念的附录．

[2] 参见杜石然《函数概念的历史发展》，载《数学通报》(1961.6) p.33.

[3] 例如，平信的邮资 y 是信件重量 x 的函数，但只要 x 不超过20克，不管 x 多重，邮资总是8分，x 变 y 并不随之而变．

[4] 李善兰、伟烈亚力合译《代数学》，也使用了“函数”这个词，但这书的序作于清咸丰九年(1859)孟冬，而《代微积拾级》的序作于同年孟夏八日 (1859.5.10星期二)，故早于前者．

数，则如下式

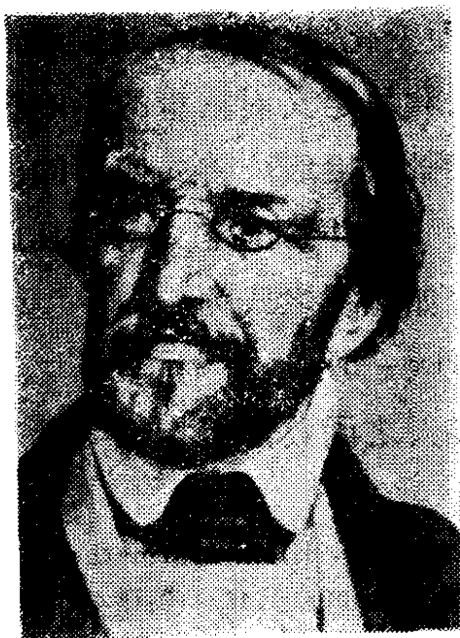
天＝函（地）〔$x=f(y)$〕；地＝函（天）〔$y=f(x)$〕。”

这里“函”是包含的意思。这定义大致相当于欧拉的解析表达式定义，在一个式子中“包含”着变量 x，那么这个式子就是 x 的函数。

1797年拉格朗日在《解析函数论》中称能用幂级数表示的关系为函数。[1] 换句话说，凡函数都能用幂级数表示。

1807年傅里叶在《热的分析理论》中指出：“任何函数都可以表示成三角级数。”[2]

1834年罗巴契夫斯基拓广了函数的概念。他写道：“这个一般的概念，要求把那个对于每个 x 而给予的并随着 x 而逐渐变动的数，称为 x 的函数。函数值则可能由解析表达式给出，也可能由一个条件给出，这条件提供检验全部数并从其中选出一个数的方法。最后，函数的依赖关系可以存在但仍然是未知的。”[3]



狄利克雷(Dirichlet)

1837年，狄利克雷

〔1〕E.T. Bell, The development of mathematics, (1945) p.289.

〔2〕F.Cajori, A History of Mathematics, (1919)p.270.

〔3〕Н.И.Лобачевский,Об исчезании тригонометрических строк,(1834).转引自И. Г. Башмакова等《初等数学全书》第一卷《算术》刘绍祖译，(1959)p.92.

(Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, 1805.2.13—1859.5.5)进一步给出："对于在某区间上的每一个确定的 x 值，y 都有一个或多个确定的值，那么 y 叫做 x 的函数。"[1] 这已经相当接近现在许多教科书所采用的定义。

19世纪70年代，康托尔的集合论出现以后，函数便明确地定义为集合间的对应关系。这是目前一般教科书所用的"集合对应"定义。[2]

自从17世纪变量这个概念引入数学以来，它的意义一直是不清楚的。实际上在"20世纪以前，几乎没有认真地讨论过"。[3] 后来许多基本概念如极限、函数等逐渐获得了精确的定义，但是变量却仍然十分含混。一提到变，自然要牵涉到时间，而时间在数学中从来没有很好地定义过。

"自变量"这个提法本身是有缺点的，因为变量必定依赖于时间而变，也就是它必定是时间的函数，不可能脱离时间而"自变"。

采用了"集合对应"定义以后，初步摆脱了这个困境。定义函数无需再依赖于时间了。而变量这个词，许多学者主张废弃不用，而将自变量改称为"argument"[4]，或者干脆将"自变量"、"因变量"改称为"第一值"(first entry)，"第二值"(second entry)。[5]

---

[1] A. Ostrowski, Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung, Bd. 1, pp. 43—44.

[2] 如果对于集合M中的每一个元素 x，都有集合N的一个元素 y 与之对应，则称 y 为 x 的函数。

[3] E.T. Bell, The Development of Mathematics (1945) p. 283.

[4] 德文 Argument，俄文 аргумент，至今没有恰当的译名，不应再译成自变量是肯定的。

[5] first entry, second entry，还没有很好的译名。另外还有许多叫法，如 first element, ……, first Coordinate, ……等等。

1914年，豪斯多夫(Felix Hausdorff, 1868.11.8—1942.1.26)在他的名著《集合论纲要》(Grundzüge de Mengenlehre)[1]中用"序偶"(geordnetes Paar, ordered pair)来定义函数。它的优点在于无需在函数的概念中引入意义不明确的"对应"概念。不过又引入了"序"的概念。

1921年库拉托夫斯基(Casimir Kuratowski, 1896— 波兰著名数学家)用集合概念来定义序偶[2]。即集合

$$(a,b)=\{\{a\}, \{a,b\}\}$$

称为一个序偶。这样就避免了先定义"序"的概念。

目前(特别是60年代以后)被广泛采用的函数定义是(各书提法稍有差异)：

设 f 是一个序偶的集合，如果当 $(x,y)\in f$，且 $(x,z)\in f$ 时 $y=z$，则 f 称为一个函数。

在这个定义里，只牵涉到一个集合的概念，序偶也是用集合来定义的。而集合本身是一个不定义(undefined)概念或原始(primitive)概念。

函数这个概念已成为数学中最重要的几个概念之一，而变量这个词却逐渐被新的词所代替。

---

〔1〕第一版序作于1914.3.15.第三版有译本，《集论》(Mengenlehre, 1935)张义良等译，(1960)。

〔2〕参见 Abraham A. Fraenkel, Abstract Set Theory (1953) p.181.

第九章　射影几何、概率论、非欧几何、拓扑学等

第一节　射影几何、画法几何等

从公元前 3 世纪一直到17世纪初，几何学基本上没有什么改变，欧几里得和“几何学”几乎成为同义语。除了欧几里得几何之外便没有别的几何。

17世纪出现了解析几何，几何学才有了新的发展．和笛卡儿的解析几何同时，几何学还发生了另一场重要的变革，这就是射影几何的建立。[1]

图画的描绘是射影几何的最早起源，这甚至可以上溯到远古时代。在希腊的阿波罗尼斯和巴普士的著作中可以看到若干零星的，可以归入射影几何领域内的定理。欧洲文艺复兴时期透视学的蓬勃发展，给射影几何的成长准备了良好的条件。射影几何真正的创立是在17世纪，决定性的进步是笛沙格和帕斯卡的工作。[2]

笛沙格（Gérard　Desargues），1591 年生于法国里昂，

〔1〕 А.Д.Александров《几何学》，赵孟养译，载《数学通报》(1955.4.5).

〔2〕 Н.Ф. Четверухин《射影几何学》（Проективная　геометрия）(1955) p.361《历史简述》。

1661年10月卒于同地．象笛卡儿一样，曾在军队中任职．以后在巴黎公开讲学(1626)，又当过建筑师和工程师．他出版了好几种著作，包括有关透视学的书．最为人称道的是他的《试图处理圆锥与平面相交情况的计划草案》(Brouillon projet d'une atteinte aux évenements des rencontres d'un cone avec un plan)[1]，1639（后于笛卡儿解析几何两年）在巴黎出版．

笛卡儿和帕斯卡极端推崇这本书，可是它并未立刻引起普遍的注意．这也许是因为这本书的出现和解析几何同时，而后者具有更大的吸引力，也许是笛沙格的主要兴趣在研究透射的应用．总而言之，这一杰作不久即被忘却甚至遗失．直到1845年法国几何学家兼数学史家沙尔偶然在巴黎的一个旧书店里发现这一重要著作的原稿抄本．

从那时候起，这本书才被列为近世纯粹几何初期发展的经典著作．书中引入了无穷元素．“在无穷远处有公共点的直线叫做平行线”或“平行线在无穷远处相交”的说法早先见于刻卜勒的著作（1604），这里为笛沙格所采用．[2]

笛沙格导入了无穷远点，无穷远线，将直线看作具有无穷大半径的圆，而切线是割线的极限．讨论极点与极线、透射(homology)、透视（perspective)，奠定了射影几何的坚实基础．他所发现的“笛沙格定理”（两三角形对应顶点联线共点，则对应边交点共线，其逆亦真）是全部射影几何的基本定理．以后为布利安松（Charles-Julien Brianchon，1783.12.19—1864.4.29)、热而工(Joseph-Diez Gergonne，1771.6.19—

〔1〕Dirk J. Struik, A concise history of mathematics (1954) p. 148.

〔2〕T.L. Heath译注 Euclid's Elements. vol. Ⅰ (1956) p. 193，加在平行线定义下的注．



帕斯卡(Pascal)

1859.5. 4)、彭赛列等人所引用并发扬。笛沙格的思想，直到19世纪才显露出它丰饶多采的内容。

17世纪另一个对射影几何有重要贡献的数学家是帕斯卡(Blaise Pascal)，1623年6月19日生于法国中部克勒蒙菲朗 (Clermont-Ferrand)，1662年8月19日卒于巴黎。他的父亲E.帕斯卡 (Étienne Pascal)也是数学家，对他的独子自幼精心培养.[1]过去的传记作者特别是他的姐姐吉尔伯特(Gilberte)，喜欢将帕斯卡渲染成一个神童。传说E.帕斯卡希望小帕斯卡先打好古代语的基础，不许他过早接触数学，以免过度紧张的思考损害健康。所以将一切数学书籍都收藏起来，可是这禁令反而激起了帕斯卡的好奇心。他12岁的时候，追问父亲几何学究竟是什么。父亲简单回答说："几何学是使作图正确无误的方法，并找出各图形间的比例关系。"说完之后，马上禁止帕斯卡再谈这些事。

然而帕斯卡激动的心情不能抑制，他思考上述的定义，用木炭在地砖上作图。自立定义，自行证明，竟能独自推出三角形

[1] 传记见 E.T. Bell, Men of Mathematics (1937) pp. 73—89.

内角和等于二直角的定理. 这使他父亲惊喜若狂，以后便再也不阻止他钻研数学了. 父亲 这 时 给 他一本欧几里得《几何原本》，他很容易便学通了.

帕斯卡16岁的时候，发现了非常有名的“帕斯卡六边形定理”：内接于一二次曲线的六边形的三双对边的交点共线. 写成《圆锥曲线论》(Essay pour les coniques)，1640年用单叶纸印出. 这是自希腊阿波罗尼斯以来圆锥曲线论的最大进步，也是射影几何方面的出色成就. 帕斯卡自己说：“我对这一科目若有所发明，实得自笛沙格著作的帮助.”

笛卡儿看到帕斯卡的《圆锥曲线论》，不大相信这不是他父亲的代笔.

帕斯卡从他的定理导出 400 以上的推论，还给出若干射影几何的定理. 例如“过一点的四直线在任一截线上所截取的线段的交比不变”. 这已为巴普士所知.

帕斯卡终生为病魔所缠，失眠症和牙疼经常骚 扰 他 的 安宁. 1658年某夜，难以忍受的牙疼折磨着帕斯卡，使他彻夜不能入睡. 一气之下，帕斯卡奋起工作，竭力思索摆线的道理. 说也奇怪，竟使他完全忘却了痛苦. 于是穷八昼夜之功，完成了《摆线论》(Traité general de la roulette)的名著，解决许多关于摆线的问题. 这对年青的莱布尼兹有很大的影响.

帕斯卡还有很多的建树. 在“算术三角形”，概率论方面的工作也很有名. 他19岁时发明了世界上第一台机械加法计算机[1]；23岁时推测大气压力的存在；还发现流体力学的“帕斯卡原理”. 25岁的时候，当他正享有科学家的盛誉，竟突然决

[1] D.E. Smith, A Souice Book in Mathematics (1959) p. 165.

定放弃这些科学研究，献身于哲学和宗教。这种难以理解的行动，不能不是科学界的极大损失。

17世纪是一个创作丰富的年代，除了射影几何外，还出现了许多新的科目，如解析几何、概率论、微积分等。特别是微积分最引人入胜，多数学者被这新兴的方法所吸引。17世纪中叶到18世纪末叶，数学家大多致力于分析学的研究。帕斯卡死后的整整一个世纪里，射影几何几乎没有什么显著的进步。直到18世纪末叶，才有了新的转机。与此同时，几何方面又形成了微分几何、画法几何等新的分支。这两方面蒙日都有重大的贡献。



蒙日(Monge)

蒙日（Gaspard Monge）1746年5月10日生于法国东部第戎(Dijon)之南的小镇蓬(Beaune)，1818年7月28日卒于巴黎。他是法国拿破仑时代数学界的领导人物[1]。1768年他是法国东北角阿登(Ardennes)省的梅济埃尔(Mézières)军事学院的数学教师，1794年成为理工科大学教授。

蒙日将微积分应用于曲线和曲面的研究，1809年出版《分析在几何上的应用》

〔1〕传记见E.T. Bell, Men of Mathematics (1937) pp.183—205.

(Application de l'analyse à la géométrie)，这是第一本微分几何的书[1]。

画法几何也是由蒙日开其端。法国大革命前后，军事上筑城术的迫切需要，促使画法几何的产生。蒙日的研究有极大的实用价值。但因为牵涉军事秘密，很久未能将成果公诸于世。当军事的约束解除以后，他将《画法几何》(Géométrie descriptive，1798—1799)出版，这已在开始建立画法几何之后30年了[2]。

其中有若干方法可以追溯到笛沙格和1738年弗里则(A.F Frézier，1682—1773)等人的工作，但首先深入地研究，使它成为独立学科的，还是蒙日。

蒙日是一个优秀的教师，在他的直接教导和影响下，大批的几何学家成长起来。突出的有卡诺、杜鹏(Charles Dupin，1784—1873)[3]、布利安松[4]和彭赛列等。

这些几何学者放弃分析的方法，热中于"纯粹"几何的探讨。他们的累累硕果，为了和解析几何以及古典的欧几里得几何相区别，常叫做近世综合几何。

卡诺(Lazare Nicolas Marguerite Carnot，1753—1823)早年学于梅济埃尔军事学院，受蒙日的影响研究几何学。以后从事军事活动，1796年被拿破仑流放。[5]卡诺的《位置几何学》

〔1〕微分几何和微积分的发展是分不开的。早期的费马、牛顿、莱布尼兹等已将分析方法用于几何研究，后来经过欧拉、高斯、黎曼和近代的列维-齐维他、嘉当等人的培植，于是蔚为大观。

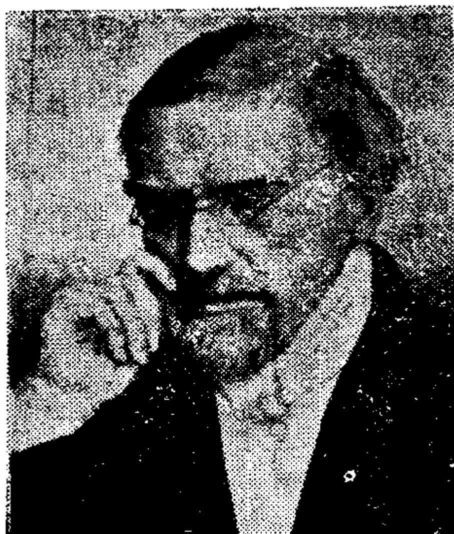
〔2〕V. Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p. 288.

〔3〕杜鹏指标线(Dupin's indicatrix)因他而得名。

〔4〕布利安松定理的发现者。

〔5〕为了反对拿破仑搞"苦迭打"(coup d'état，军事政变)。

(Géométrie de position, 1803)和《横截线论》(Essai sur la théorie des transversales, 1806)引入种种有价值的射影几何理论.



彭赛列(Poncelet)

彭赛列(Jean Victor Poncelet) 1788年7月1日生于法国东北角的梅斯(Metz), 1867年12月23日卒于巴黎. 他是近世射影几何的奠基者之一. 他在巴黎理工科大学期间(1807—1810), 受教于蒙日. 1812年投入军队, 任工兵营中尉. 随拿破仑侵略军远征莫斯科, 遭到惨败. 1812年11月18日斯摩棱斯克(Смоленск, 第聂伯河岸)之役[1], 在克拉斯内(Красный)附近被当作死尸弃在冰冻的战场上. 一队俄国的搜索兵发现他穿着工兵军官的制服, 还有一丝呼吸, 便把他抓到军营去问话. [2]

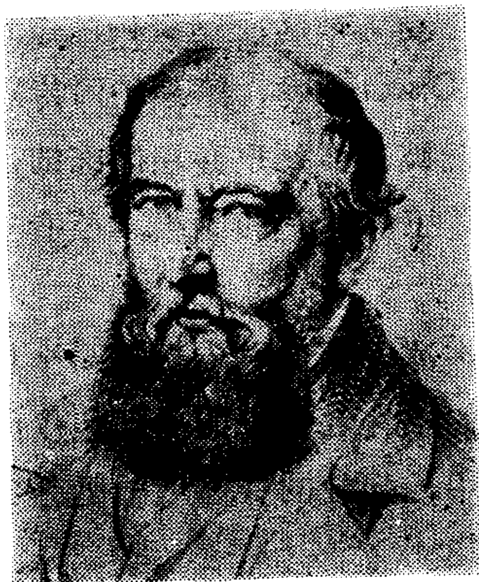
后来被命令和其他俘虏一起在冰天雪地里步行了四个月. 严寒使温度计的水银凝固, 褴褛的衣裳和很少的黑面包仅能维持他的生命. 很多俘虏倒毙在途中, 强壮的身体使他勉强到达

〔1〕参见《苏联大百科全书》22卷 (1953) pp. 466—470, “1812年俄军反攻”条.

〔2〕传记见 E.T. Bell, Men of Mathematics (1937) p. 207. 又 C.C. Gillispie, Dictionary of Scientific Biography, vol. XI (1975) pp. 76—82.

目的地。1813年3月，彭赛列被投进沙拉托夫(Саратов，伏尔加河畔)的监狱。4月的太阳恢复了他的活力，彭赛列开始追忆过去在大学里所学的数学。在狱中没有书籍和纸笔，起先他藏起一些取暖的木炭，在墙上作图。后来才找到一些纸张。他潜心研究图形经过投影后不变的性质，进而开辟了新的几何领域。

1814年6月，他被释放。9月回到法国后，立即着手整理狱中的研究心得。经过几年的努力，终于完成了《图形的射影性质》(Traité des propriétés projectives des figures)，1822年在巴黎出版[1]。这书内容丰富，奠定了射影几何的基础，详细讨论交比、射影对应、对合变换等，并引入极有价值的连续原理。



斯太纳(Steiner)

19世纪另一个大几何学家是斯太纳(Jacob Steiner)，1796年3月18日生于瑞士伯恩(Bern)州北部的小镇乌前斯多夫(Utzensdorf)，1863年4月1日卒于伯恩。他的经历也颇不平凡。

斯太纳幼年是一个牧童，父亲是贫苦的农民，无力送他上学。斯太纳14岁还是一个文盲，18岁的

〔1〕英译文见D.E. Smith, A Source Book in Mathematics (1959) p. 315.

时候，幸运地遇到了一位教师培斯塔罗齐（Johann Heinrich Pestalozzi，1746.1.12—1827.2.17)，把他吸收到小学来.

培斯塔罗齐是历史上著名的教育家，一生从事教育工作. 1776年，曾收集贫苦儿童二十人，让他们半耕半读. 1798年，瑞士受法国的侵略，很多儿童流离失所，他又收罗了八十多个战争留下的孤儿，在小寺院里办耕读学校. 不久又因没有得到地方的支持而失败.

1800年在瑞士西部的伊弗同(Yverdon)办学校. 培斯塔罗齐把斯太纳吸收到学校来. 由于培斯塔罗齐的循循善诱，教导有方，使斯太纳对数学产生了强烈的爱好.

斯太纳经过四年多的勤奋学习，在22岁（1818）时考上了德国的海德堡（Heidelberg）大学. 1834年，成为柏林大学教授.

斯太纳建立了射影几何的严密系统，推广卡诺完全四边形的工作到空间多边形去，完成了点列、线束、二次曲线及曲面的理论，讨论圆锥曲线和“帕斯卡六边形”的种种性质. 在几何方面作出了重要的贡献.

斯太纳得到培斯塔罗齐的赏识与培养，才开展了一生的数学事业. 而培斯塔罗齐在自己的辛勤教导下，造就了被后人誉为“欧几里得以来的最大几何学家”，也可以终生无憾.

沙尔(Michel Chasles，1793.11.15—1880.12.18)是蒙日晚年的学生，是几何学家兼数学史家. 他曾讨论直射变换(collineation)和对偶的一般理论（1837）. “对偶”（duality）一词是热尔工创用的. 沙尔导入“非调和比”（anharmonic ratio）的名词，相当于克利福德(William Kingdon Clifford，1845.5.4—1879.3.3英国人）所用的“交比”（cross

ratio)[1].

斯陶特(Karl Georg Christian von Staudt, 1798. 1. 24—1867.6.1, 德国人)[2]的《位置几何学》(Geometrie der Lage, 1847)完全摆脱了代数和度量的关系，建立纯粹的几何理论。

总的来说，射影几何的某些基本概念在古希腊阿波罗尼斯、巴普士等人的著作中早已出现，到17世纪的笛沙格、帕斯卡得到进一步发展，然而到19世纪中叶，才蔚为大观。

第二节　概率论的缘起

概率论是研究大量随机现象的统计规律性的一门数学，有着广泛的应用。它产生于17世纪，后来变成庞大的数学分支。近几十年来，随着科学技术的飞速发展，概率论大量应用到国民经济、工农业生产、近代物理、气象、地震、生物、医学等部门上去。新兴的许多应用数学，如信息论、对策论、排队论、控制论等等几乎无一不以概率论为基础。它的发展正是方兴未艾。

费马、帕斯卡、惠更斯等人是概率论早期的创立者。

对概率论的兴趣，本来是由保险事业的发展而产生的，但刺激数学家思考概率论的一些特殊问题却来自赌博者的请求。

有一个赌者梅累(Chevalier de Méré)向帕斯卡提出一个使他苦恼很久的问题："两个赌徒相约赌若干局，谁先赢 S 局就算是赢了。现在一个人赢 $a(a<s)$ 局，另一个人赢 $b(b<s)$

〔1〕 F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p. 292.

〔2〕 他原先是一个中学教师，1835年成为埃尔兰根(Erlangen)大学教授。

局，赌博中止。问赌本应怎样分法才合理？”[1] 帕斯卡将这问题和他的解法寄给费马，这是1654年7月29日的事。

惠更斯(Christiaan Huygens) 1629年4月14日生于海牙(The Hague)，1695年6月8日卒于同地。他虽然以天文、物理学家名世，但也可以列入大数学家之林。幼年在海牙学习法律及数学，22岁（1651）时发表批评知名数学家圣文森(Saint-Vincent)面积论错误的论文。1666年接受法王路易十四的聘请加入法国科学院，他留在巴黎一直到1681年。[2]

当惠更斯到巴黎去的时候，听说帕斯卡与费马通信的事。他企图自己解决这一问题，结果便写成《论赌博中的计算》(De Ratiociniis in Ludo Aleœ, 1657)一书。这是概率论最早的论著。

概率论虽然肇始于17世纪，但为此准备基础却是较早的事。例如卡当在其《论赌博》(De Ludo Aleœ, 1663出版，已在卡当死后多年）一书中已计算了掷两颗或三颗骰子时在一切可能方法中有多少方法得到某一总点数。

塔塔利亚曾做过类似的计算。更早的巴巧利也做过分赌本的问题。

17、18世纪之交，有不少数学家从事概率的研究，伯努利(Jacob Bernoulli, 1654—1705）的巨著《猜度术》(Ars Conjectandi, 1713，瑞士巴塞尔出版)是一项重大的成就，其中

[1] Isaac Todhunter (1820. 11. 23—1884. 3. 1), A History of the Mathematical Theory of Probability (1949) 第2章。又 Б. В. Гнеденко《概率论教程》丁寿田译(1959) p.393.

[2] 他在天文学上以借助自己制造的望远镜发现土星光环以及土星卫星著称。他倡导光的波动说，和牛顿的微粒说并为光本性的两大学说。

包含概率论中的“伯努利定理”，这是“大数定律”的最早形式．由于它的极端重要性，1913年12月彼得格勒(今列宁格勒)科学院举行庆祝会，纪念“大数定律”诞生二百周年．[1]

伯努利之后，德莫瓦佛又作了巨大的推进．他的《机会的学说》(Doctrine of Chances, 1718, 伦敦出版）包含现今称为“德莫瓦佛—拉普拉斯定理”（中心极限定理的一部分）的特殊情形．

辛普生(Thomas Simpson, 1710.8.20—1761.5.14)[2]的《论机会的性质与规律》（A Treatise on the Nature and Laws of Chance, 1740, 伦敦出版）也是这个时期重要的概率论著作．

18世纪法国蒲丰(Comte de Buffon, 1707—1788)在《或然算术试验》(Essai d'arithmétique morale, 1760年完成，1777年刊行）中导入“蒲丰问题”（或投针问题）的几何概率问题：将一根长 $2l$ 的针任意投在画有许多平行线的平面上，每两根线相距 $2a(a>l)$，可以证明针与任一直线相交的概率是 $P=\frac{2l}{a\pi}$．值得注意的是这里出现了 π．如果用实验的方法测定 P，即用频率来近似地代替概率，就可以完全不借助几何方法和知识求出 π 来．事实上确有人这样做过．只是所得的

〔1〕 F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p. 222.

〔2〕 微积分中的近似积分法“辛普生公式”以他的名字命名．他的父亲原想培养他成为一个织布工，但他坚持读书，遭到父亲的强烈反对．于是愤然离开家庭，在一个小贩处得到一本数学书，从此开始钻研数学．一生备受贫困，1743年成为武力赤(Woolwich)军事学院教授，1745年为皇家学会会员．

值不怎么精确而已。[1]

19世纪初期概率论的巨大进步是和拉普拉斯分不开的．他的经典著作《分析概率论》(Théorie analytique des probabilités, 1812, 巴黎出版）总结了这一个时代的概率论研究.

拉普拉斯还有好几种概率论著作．他在《概率的哲学探讨》(Essai philosophique sur le probabilités, 完成于1795, 出版于1814）中叙述了一个耐人寻味的例子．他根据伦敦、彼得堡、柏林和全法国的统计资料，得出几乎完全一致的男婴出生数与全体出生数的比值．所有这些比值在10年间总摆动于同一数字22/43＝51.16％上下．另一方面，用巴黎40年间(1745—1784）的资料却得出另一数值25/49＝51.02％.

拉普拉斯对于这样显著的差异感到奇怪，后来经过仔细调查，发现巴黎附近某地区有抛弃男婴的习俗，以致歪曲了出生率的真相．经过修正以后，便看出这个数值也稳定地接近22/43.

这一事实无可争辩地证明，在纷纭杂乱的大量偶然现象的背后，隐藏着必然的规律．探索这些规律，利用这些规律来为人类服务，正是概率论和数理统计的任务.

人类在实践中碰到的现象大致可以分为两类：必然现象和偶然现象（或决定性关系和非决定性关系）．数学分析和微分方程是研究必然现象或决定性关系（函数关系）的数学工具．而概率论与数理统计便是研究偶然现象的数学工具.

对于决定性现象，只要建立起运动的微分方程，再知道初始条件，就可以预测未来时刻的状态．在历史上最成功的例子

---

[1] Б.В. Гнеденко《概率论教程》丁寿田译(1959) p. 399.

就是根据万有引力推导出行星的轨道来。后来并由此发现了海王星和冥王星。

于是有人认为一切自然现象都可以用微分方程来描述，再知道初始条件，便可预知以后任何时刻的状况。到此为止，科学研究也就可以结束了。这和机械唯物论的哲学观点是分不开的。[1]

拉普拉斯是机械唯物论的代表人物，他认为概率问题的出现，是因为我们的知识不完全[2]；如果科学研究达到这样的程度，能够写出一组包罗万象的公式，那么过去和未来的现象都可以推知了。[3]这种思想必然导致宿命论，就等于说一切都只好听天由命，人类的全部努力也都是多余的了。



泊松(Poisson)

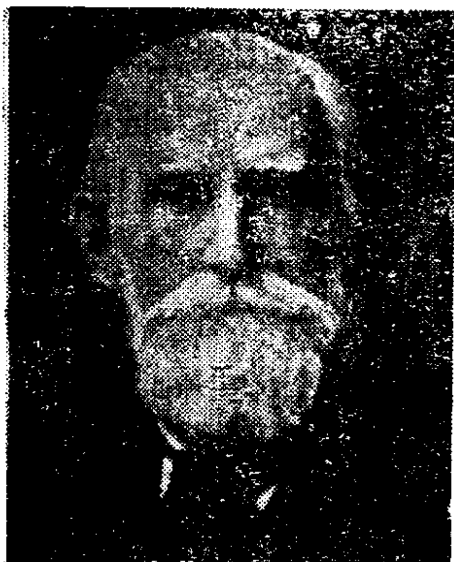
19世纪在概率论领域里的卓越人物有高斯和泊松(Siméon-Denis Baron Poisson, 1781.6.21—1840.4.25)等人。高斯奠定了最小二乘法和误差论的基础，泊松推广了大数定律，引入十分重要的"泊松分布"。

俄国的切比雪夫(Пафнутий Львович

〔1〕参考关肇直《概率》，载《数学通报》(1959.4)p.2.

〔2〕D.J.Struik, A Concise History of Mathematics (1954) p. 196.

〔3〕Laplace, Théorie Analytique des Probabilités, Introduction; Oeuvres, t.7(1886, Paris) p.6.



切比雪夫(Чебышев)

Чебышев, Pafnutij Lwowitsch Tschebyscheff, 1821.5.16—1894.12. 8) 是享有世界声誉的学者，是大数定律创建者之一．他的学生马尔可夫（Андрей Андреевич Марков, Andrei Andrejewitsch Markow, 1856. 6. 14—1922. 7. 20）导入有名的“马尔可夫链”．

本世纪30年代苏联的柯尔莫戈洛夫(Андрей Николаевич Колмогоров, André N.Kolmogoroff, 1903.4.25—) 以勒贝格的测度论为基础，给出概率论的公理体系，影响颇大[1].

概率论（Theory of probability）传入我国，译名很混乱．英傅兰雅、华蘅芳合译概率论的书，定名为《决疑数学》（1896）[2]．后来“probability”又译为“可遇率”、“或是

〔1〕A.H.Колмогоров《概率论基本概念》(Основные понятния теории вероятностей, 1933)丁寿田译（1952）．德文本 A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung,（1933）．
近代概率论进展情况参考《概率统计研究近况》，载《计算机应用与应用数学》（1976）1期 pp. 32—65.

〔2〕丁福保、周云青《四部总录算法编》(1956).

率”[1]，“或然率”[2]，“公算”[3]，“适遇”[4]。而日本叫做“确率”。除此以外，还有多种译名，如“可能率”，“机率”，“盖然率”，“信率”等等。大概是数学术语之中译名最多的。1935年《数学名词》[5]定为“几率”或“概率”。1956年《数学名词》[6]仍然是“概率”、“几率”并用。1958年《俄中数学名词》[7]译“вероятность”，也是“概率”、“几率”并用。1964年《数学名词补编》[8]开始确定用“概率”，到1974年《英汉数学词汇》[9]才正式将“probability”定为“概率”。

第三节 非欧几何的诞生

1826年2月23日是一个值得纪念的日子。这一天，在俄罗斯喀山（Казань，莫斯科之东，伏尔加河畔）大学发生了一件事，使大家认为这一天是非欧几何学诞生的日子[10]。这一天，俄罗斯数学家罗巴契夫斯基在喀山大学物理数学系宣读了他的论文《简要叙述平行线定理的一个严格证明》[11]。这标志着几何学的根本变革，数学发展史的近代数学时期从此开始。

---

〔1〕段育华、周元瑞《算学辞典》(1939) pp.328,613.

〔2〕日本长泽龟之助《代数学辞典》，薛德炯等译，(1939)p.820. 这一译名在解放前颇通行.

〔3〕赵缭《数学辞典》(1943)p.218.

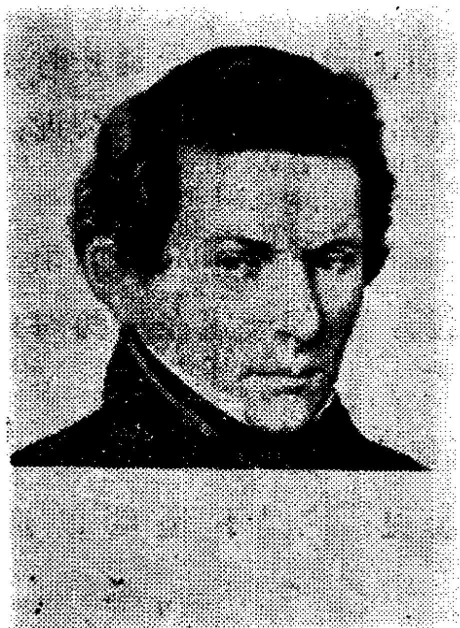
〔4〕倪德基等《数学辞典》(1948)p.371.

〔5〕国立编译馆编.

〔6〕—〔9〕均中国科学院编.

〔10〕А.П.Норден《非欧几何底125年》，汪集生译，载《数学通报》(1954.3) p. 44. В.И.Костин《几何学基础》，苏步青译 (1954) p. 40.

〔11〕Roberto Bonola, Non-Euclidean Geometry (1955) p. 85.



罗巴契夫斯基(Лобачевский)

罗巴契夫斯基(Николай Иванович Лобачевский, Nicolai Ivanovitsch Lobatschewsky), 1792年12月1日生于下诺夫哥罗德（Нижний-Новгород)，即今高尔基城（Горький）[1]，1856年2月24日卒于喀山。他生长在一个贫苦的公务员家庭中，一生几乎全在喀山度过，在那里上中学(1802—1807)和喀山大学(1807—1811)。毕业后留校工作，后来升为教授。历任物理数学系主任(1820—1821, 1823—1825) 及校长(1827—1846)等职。他一生的活动，奠定了喀山大学兴盛和光荣的基础。

要了解罗巴契夫斯基革命性的成就，先回顾一下欧几里得《几何原本》平行公设（或公理）的历史。

---

〔1〕生年生地的详细考证见 А.А.Андронов(1901—1952), Где и когда родился Н.И.Лобачевский, Историко-Математические Исследования Ⅸ(1956)（《数学史研究》9卷）. 关于生日另一种流行的说法是1793年11月2日，例如 В.И.Костин《几何学基础》 p. 39. 今取前说.

传记见(1) В.Ф.Каган, Г.Ф.Рыбкин《罗巴切夫斯基传略》，赵孟养译，载《数学通报》(1956.2) pp. 16—20. (2)В.Ф.Каган(1869—1953), Лобачевский, (1948). (3) E.T.Bell, Men of Mathematics (1937) pp. 294—306. (4) 苏联《数学史研究》9卷有纪念罗巴契夫斯基逝世100周年文章若干篇.

《几何原本》第Ⅰ卷一开头就提出23个定义．最后一个是平行线定义："平行线是在同一平面上向两边无限延长时永不相交的两条直线．"[1] 在23个定义之后，接着列出五个公设．第5个是有名的"欧几里得第五公设"：

"如果一直线和两直线相交，所构成的两个同旁内角之和小于两直角，那么，把这两直线延长，它们一定在那两内角的一侧相交．"

这公设不论在词句和内容方面都比其他四个公设复杂得多．[2] 而且不象其他公理那么显而易见．它是不是可以证明呢？人们自然会发生这样的疑问．

大家认为欧几里得把它当作公设，是因为他找不到这命题的证明．这实在是《几何原本》这千古不朽的巨著的白璧之瑕．从《几何原本》出世以来，一直到罗巴契夫斯基为止，学者们投入无穷无尽的精力，力图洗刷这唯一的"污点"．虽然很多人认为自己已补救了欧几里得体系的缺陷，可是实际上不是证明有错误，就是用另一条等价的公理代替了第五公设．[3]

普罗克拉斯（Proclus, Πρόκλος Διάδοχος，约公元412年

〔1〕据Thomas L.Heath校订注释本 The Thirteen Books of Euclid's Elements （1925） p. 190. 徐光启译本（1607）是第一卷第三十四界："两直线于同面行至无穷，不相离亦不相远，而不得相遇，为平行线．"

〔2〕第一公设：任二点间可联一线；第二公设：直线可无限延长；第三公设：以任何中心，任何半径可作一圆；第四公设：凡直角都相等．

〔3〕参考H. S. Carslaw《非欧平几何学及三角学》（The Elements of Non-Euclidean Plane Geometry and Trigonometry, 1916），余介石译（1950）．又Roberto Bonola, Non-Euclidean Geometry （1955），第1，2章有详细的历史记载．

生于拜占庭，485年卒）在批判托勒密对第五公设试证的错误后，企图用另一方法证明它。但实质上是采用了另一条等价的公理："在平面上两条不相交的直线彼此相隔的距离是有限的。"

阿塞拜疆的天文学家纳速拉丁曾将欧几里得《几何原本》校译成阿拉伯文。他证明第五公设，用到"三角形三内角和等于两直角"的命题，这和第五公设等价。

1663年7月11日，瓦里士在牛津大学演讲时指出"对于任意的几何图形，有任意大小的相似形存在"可以代替欧几里得平行公理。

萨凯里（Girolamo Saccheri，1667—1733，米兰的神父）对平行公理作了有价值的贡献，可说是非欧几何的先驱。1733年发表带有很长标题的著作：《辩明每一个缺陷的欧几里得几何：……》（Euclides ab omni naevo vindicatus: ……）。萨凯里指出只要假设"有两个大小不同的等角三角形存在"，就可以导出第五公设。

1741年，克雷罗用"如果四边形的三个角是直角，则第四个角也是直角"代替第五公设。

兰伯特（Johann Heinrich Lambert，1728.8.26—1777.9.25）1766年发表《平行线论》（Theorie der Parallellinien），也有和萨凯里类似的研究。

勒让德1794年出版《几何原理》（Éléments de Géométrie），被世界各国采用为初等几何教科书。他将《欧几里得》的命题重新编排，把定理和问题分开，并简化其证明，但仍保持证明的严格性。

勒让德在这书的初版和许多再版本中试图证明第五公设。

1833年的论文更集中了好几种关于平行理论的证法。他采用了几个与第五公设等价的命题："存在一个三角形，它的内角和等于二直角"；"通过一个角的内点，可作一直线与此角的二边相交"；以及"过不共线的三点可作一圆"。

普雷菲尔（John Playfair，1748—1819，苏格兰人）在他校订的《几何原本》（1795在爱丁堡出版）中采用了一条很好的公理："过线外一点，只能作一直线与已知直线平行。"（或"相交二直线不能同时平行于第三线"）这一公理，比第五公设简单明了，所以受到普遍的欢迎，被采用在现今的教科书中，称为"普雷菲尔公理"（Playfair's Axiom）。不过这公理并不是普雷菲尔的新发明，它早已在普罗克拉斯《欧几里得第一卷注释》中看到。

二千多年来，试证第五公设的学者和提出的等价命题简直多不胜数。这对建立欧几里得几何严格的逻辑体系起了很大作用，为非欧几何的发现铺平了道路。可是他们都没有"清除"这《欧几里得》中的"污点"。

平行公设是否可以用《欧几里得》的其他公理去证明呢？如果用另一个公理去代替平行公设，将会得到怎样的结果呢？冲破笼罩在第五公设周围的黑暗，彻底解决这两千年来的悬案的重大任务，落在罗巴契夫斯基的身上。

罗巴契夫斯基在1816—1817年所编写的讲义笔记中开始试作第五公设的证明。后来发觉有误，没有编入《几何学》（Геометрии）的原稿中。这本《几何学》对几何原理有很多革新，他把全部命题按是否依赖于第五公设划分为两部分。前五章叙述不靠平行公设得到证明的命题，现在通常叫做"绝对几何"。然后转入用到第五公设才能证明的定理。然而这本书

在1823年却遭到审查者否定性的尖锐批评.

罗巴契夫斯基并没有放弃第五公设的试证，他企图用归谬法去证明它.

绝对几何中有这样的命题："在一个平面上，过直线 AB 外一点至少可作一条直线与 AB 不相交."命题的结论包含两种可能，一是仅可作一条直线与 AB 不相交；二是可作不止一条直线与 AB 不相交. 如果采用前者为公理，就可以导出欧几里得几何. 罗巴契夫斯基从否定前者出发，假定可作好多条直线与 AB 不相交，如果由此推出与绝对几何定理矛盾的命题，这就无异于第五公设的证明. 可是他不但没有发现任何矛盾，反而在严密的推导下，得到一连串前后一贯的命题. 构成逻辑上既无矛盾，又与绝对几何不相冲突，但又和《欧几里得》不同的几何系统. 罗巴契夫斯基把这新的几何系统叫做"虚几何学"(Воображаемая геометрия, Géométrie Imaginaire).

19世纪之初，几何学流行着黑格尔 (G.W.F. Hegel) 的理论，他说："初等几何就欧几里得所遗留给我们的内容而言，已经可以看作相当完备了，不可能有更多的进展."[1] 罗巴契夫斯基创立了非欧几何的一派——罗巴契夫斯基几何，这一事实否定了黑格尔的观点. 罗巴契夫斯基被后人称为"几何中的哥白尼".[2]

伟大的思想并不常常马上为人们所理解. 1826年2月23日，罗巴契夫斯基在喀山大学公开发表了他的革命思想. 学校将他

〔1〕转引自 E.Ф.杰士兰科《中等学校中的非欧几何》，刘碧梧译，载《数学通报》(1954.7) p. 24.

〔2〕E.T.Bell, Men of Mathematics (1937)，第16章"几何学中的哥白尼"(The Copernicus of Geometry).

的论文交付审查，结果是石沉大海，连原稿也遗失了。好在它的主要内容被罗巴契夫斯基吸收在更完备的著作《几何学原理》（О началах геометрии）之中，1829—1830年发表在《喀山通报》（Казанский вестник）上。这是世界上最早的非欧几何文献。

以后陆续发表《虚几何学》（1835），《虚几何学在一些积分上的应用》，《几何学的新原理及完整的平行线理论》等。又用法文发表《虚几何学》（Géométrie Imaginaire, 1837），并用德文写了一本书《平行线理论的几何研究》（Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, 1840柏林出版）[1]，向外国介绍他的学说。最后一本《泛几何学》（Пангеометрия, Pangéométrie, 用俄、法两种文字）是在他逝世前一年（1855）口授写成的。那时他已失去视觉。

罗巴契夫斯基不但没有得到同代人的赞扬，反而遭到嘲弄和打击。新几何学被称为"笑话"、"对有学问的数学家的讽刺"等等。可是没有任何力量可以动摇罗巴契夫斯基的信心，他象屹立在大海中的灯塔，惊涛骇浪的冲击适足显出他刚毅的意志。他一生始终为新思想而斗争。

罗巴契夫斯基死后不久，高斯的通信录开始出版。高斯给舒马赫（H.K. Schumacher, 1780—1850）的信中对罗巴契夫斯基推崇备至，渐渐引起数学界的重视。

1868年意大利数学家贝特拉米（Eugenio Beltrami,

〔1〕这是流传较广的一本著作，有各国译本。英译本George Bruce Halsted, Geometrical Researches on the Theory of Parallels (1891)。汉译本《平行线论》齐汝璜译。

1835.11.16—1899.6.4）发表《非欧几何解释的尝试》（Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea），证明非欧几何可以在欧几里得空间中的曲面[1]上实现，促使罗巴契夫斯基思想得到普遍承认.

1893年，喀山树立起罗巴契夫斯基的纪念像[2]. 他的形象和他的学说，永远为全世界人类所景仰.

非欧几何的另一个创立者鲍耶（János[3]Bolyai）.[4] 1802年12月15日生于克劳森堡（Klausenburg），即今罗马尼亚的西北部克鲁日（Cluj），1918年以前属奥匈帝国；1860年1月27日卒于马洛斯发沙黑利（Maros-Vásárhely），旧属奥匈帝国，今属罗马尼亚. 他是马加尔（Magyar，匈牙利的主要民族）人，父亲F·鲍耶（Farkas[5]Bolyai，1775.2.9—1856.11.20）在格廷根（Göttingen）大学时（1796—1799）是高斯的同学和好朋友，常和高斯讨论数学. F·鲍耶曾致力于第五公设的试证，但是除了找出几个等价命题之外，毫无收获. 当他知道儿子也醉心于平行线的时候，坚决叫他停止这项工作. 他写信给鲍耶（1820）说："希望你不要再作克服平行线理论的尝试了. 你会花掉所有的时间而终生不能证明这个问题. ……它会剥夺你一切余暇、健康、休息和所有的幸福. 这个地狱般的黑暗将吞吃成千个象牛顿那样的巨人. ……这是永远留在我心里

〔1〕例如伪球面(pseudo-sphere)，即曳物线(tractrix)的回转曲面。

〔2〕И.Депман,《数学故事》(Рассказы о математике)齐全译，(1957) pp. 123—125.

〔3〕拉丁拼法是 Johannes，英文拼法是 Johann.

〔4〕传记参考《纪念匈牙利数学家玻约伊·亚诺什逝世100周年》，载《数学通报》(1960.3) p. 2.

〔5〕拉丁拼法是 Wolfgangus，德文拼法是 Wolfgang.

的巨创。”



鲍耶(Bolyai)

鲍耶没有听从父亲的劝告，坚持工作下去，终于建立了非欧几何。1823年11月3日（他才21岁）鲍耶写信给他的父亲，告诉他研究已经成功：“我已从乌有创造另一个新奇的世界。”

鲍耶的论文原为马加尔文，他自己译成拉丁文，附在F.鲍耶的一本初等数学书中。这书的标题很长：“Tentamen juventutem…introducendi”，常简称为《试验》（Tentamen），1832—1833（后于罗巴契夫斯基3年）在马洛斯发沙黑利出版，共2卷。鲍耶的文章附在第1卷之末。标题也很长：《附录。绝对空间的科学，和欧几里得第十一公理的真伪无关……》[1]，常简称为《附录》（Appendix）。《附录》共26页，除去标题和正误表之外，全文仅24页。[2]这区区的24页，使鲍耶名垂不朽。[3]

1832年2月14日，高斯收到F·鲍耶寄来的《附录》，认为这匈牙利青年“有极高的天才”。又说这和自己40年来（1792年起）思考所得的结果不约而同。鲍耶看到高斯复信中

〔1〕第十一公理即第五公设。

〔2〕有英译本George Bruce Halsted, The Science of Absolute Space.

〔3〕1894年（喀山罗巴契夫斯基像竖立后一年），匈牙利数学物理学会在马洛斯发沙黑利久被遗忘的坟墓上竖了鲍耶的石像。

的赞词，不但未尝欣喜，反而怀疑高斯剽窃他的成果。等到1840年罗巴契夫斯基的德文著作出版时，他更为愤怒，以后便不再发表任何数学论文了。

一种学理，同时在异地发现，在历史上是屡见不鲜的。用F·鲍耶的话来说是“春日的紫罗兰在各地皆放”。微积分和非欧几何便是最典型的例子。

高斯，这位近代数学的伟大奠基者，也独立得到非欧几何的原理。他甚至在幼年时代就开始思考平行线的道理。他得到非欧几何的要旨是在1816年左右，不过他从来没有发表过这方面的任何东西。为的是怕引起“比俄喜亚人（Boeotians）的叫喊”[1]。就这一点来说，高斯缺乏罗巴契夫斯基那种大无畏的，勇往直前的精神。

非欧几何的创立，就发表时间之早，论证的完整和内容的丰富，以及对新几何学终身不渝的捍卫来说，鲍耶和高斯都不能和罗巴契夫斯基相比。

罗巴契夫斯基的革命思想为新几何开辟了道路，这时许多几何理论都建筑在改变和推广欧几里得几何概念的基础上[2]。

例如1844年格拉斯曼（Hermann Günther Grassmann, 1809.4.15—1877.9.26，德国人）把通常的解析几何坐标推广到n个，成为n维仿射空间和度量空间的几何学。凯莱（Arthur Cayley, 1821.8.16—1895.1.26 英国人）在1843年也导入n维空间的概念。

---

〔1〕Boeotia原是希腊东部的地名，Boeotians指愚人，意思是怕引起世俗的惊异和吵闹。

〔2〕А.Д.Александров《几何学》（《苏联大百科全书》）赵孟养译，载《数学通报》（1955.4）p.27。



嘉当(Cartan)

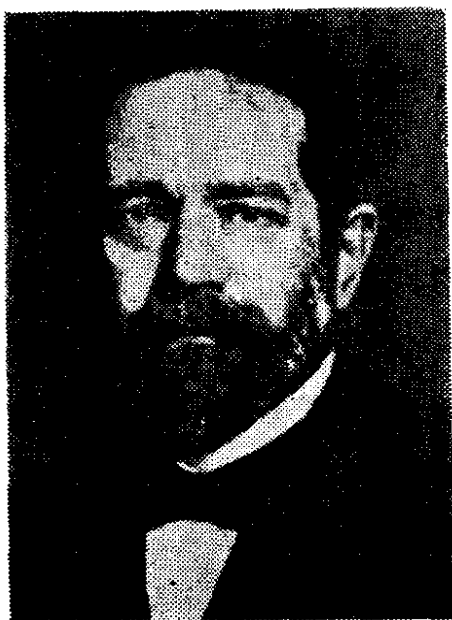
1854年黎曼在《在几何学基础上的假设》(Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen, 1867发表)的一篇报告中更推广了空间的概念，开创了几何学另一片广阔的领域——黎曼几何学[1]。以后随着爱因斯坦（Albert Einstein, 1879. 3. 14—1955.4.18)广义相对论的建立（1916以后），它得到很大的发展，成为现代微分几何的基础。

近年来，在微分几何方面工作的有列维·齐维他（Tullio Levi-Civita, 1873. 3. 29—1941.12. 29，意大利人），嘉当（Élie Cartan, 1869.4. 9—1951. 5. 6，法国人），芬斯拉（Paul Finsler, 1894—），魏尔（Claus Hugo Hermann Weyl, 1885.11.9—1955.12.8，德国人）等名家[2]。

19世纪中叶以后，几何学的种类象雨后春笋般不断涌现。到1872年，克莱茵（Felix Klein, 1849.4.25—1925.6. 22）就各种新几何学的发展作出总结，指出它们结构上的一般原

〔1〕参考 C.E.Weatherburn《黎曼几何与张量算法》周绍濂译，(1953) p. 161《史录》。有时“黎曼几何”指的是非欧几何中的椭圆几何。

〔2〕近代微分几何的发展参考苏步青《一般空间几何学的新发展》，载《科学通报》(1955) 8号 pp. 29—32。



克莱茵(Klein)

则。[1]

克莱茵用变换群的观点作为几何分类的基础。在这种观点下，几何学被看作是图形（某种元素的集合）对某种变换群为不变性质之学。

当克莱茵开始发表这种见解时，他的老师普吕克惊而怒，认为是胆大妄为。克莱茵因此离开格廷根[2]而到厄尔朗根〔Erlangen，在德国纽伦堡(Nürnberg)之北〕。1872年在那里发表一篇著名的演讲，后来通常叫做“厄尔朗根纲领”(Erlangen Programm)，对后世几何思想有深远的影响。[3]

另外，由于罗巴契夫斯基对公理体系的推敲，开始了几何基础这门数学。其中研究可以作为基础的概念和原则，分析公理系统的无矛盾性、完备性和独立性等。特别重要的是1899年希耳伯特的名著《几何基础》(Grundlagen der Geometrie)[4]用近代观点建立了欧几里得几何的公理体系，是一项划时

〔1〕А.Д.Александров《几何学》，赵孟养译，载《数学通报》(1955.4) p. 27.

〔2〕德国著名的数学中心.

〔3〕孙泽瀛《几何学之演进》，载《科学》32卷10期 p. 291. 克莱茵的几何分类，半个世纪以后才有所改变，因为有一些几何不能归入他的方案之中（如代数几何）.

〔4〕汉译本《几何基础》，江泽涵等译（1958）.

代的工作[1]。

第四节 拓扑学的初兴

依照克莱茵的观点，通常的初等几何是研究图形经刚体变换后仍保持不变的性质之学，所以叫刚体几何学，或度量几何学（metric geometry）。同样，仿射几何研究在仿射变换下不变的性质，射影几何研究在射影变换下不变的性质，而拓扑学是研究经过拓扑变换后不变的性质。所谓拓扑变换就是一一对应的双方连续变换[2]。

拓扑学是19世纪发展起来的另一个重要的几何分支[3]。早在欧拉或更早的时代，已有拓扑学的萌芽。欧拉曾考虑过著名的“哥尼斯堡七桥问题”。

---

〔1〕其重大的意义见 П.К.Рашевский《希尔伯脱“几何学基础”及其在问题的历史发展中的地位》苏步青译，载《数学通报》（1954.8.10，1955.1，1956.2）。又载于《几何基础》汉译本第一分册。

〔2〕假想在一块橡皮上面画一个圆，叫做A。现在将橡皮扭歪、拉伸、压缩，但不要拉断，也不要重叠。这时A已变成一个可能是歪歪扭扭的图形B，从A到B叫做橡皮变形。A和B形状很不相同，但是A上每一个点都变成B上的一个点，不会两个点变成一个点，也不会一个点变成两个点，这叫做一一对应。此外，A上两个非常接近的点 a_1，a_2，变成B上的两个点 b_1，b_2 也非常接近；反之，B上任意两个很接近的点，原来在A上也很接近，这叫双方连续。一一对应而且双方连续的变换叫做拓扑变换。（以上是通俗的解释）拓扑变换比橡皮变形包含更广。例如将一根环形的绳子剪开后打一个结，再将剪断的地方接起来，这是拓扑变换，但无论作怎样的橡皮变形，也不能由一个变成另一个。

〔3〕通俗和一般的介绍见（1）陈省身《什么是拓扑学》，载《科学》（1946）29卷3期 pp. 73—79。（2）江泽涵《多面形的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类》（1964）。（3）Richard Courant, Herbert Robbins《近代数学概观》第三册，杨宗磐译（1951），第一篇形势几何。

哥尼斯堡（Königsberg）现在是苏联的加里宁格勒（Калининград），在立陶宛（Литовская С С Р）之西，但属于俄罗斯共和国（Российская СФСР）. 布勒格尔（Преголя, Pregel）河横贯城区. 这条河有两个支流，叫新河、旧河，在城中心汇合成大河. 中间是岛区，河上有七座桥如图23. 问题是一个人能否一次走遍这七座桥，不许重复，也不遗漏？欧拉在1736年认真考虑了这个问题，他证明这是不可能的. [1]



图23

欧拉还创立了以他为名的多面体公式，这些都是拓扑学的先声.

麦比乌斯（August Ferdinand Möbius, 1790.11. 17—1868.9.26，德国人）在1840年提出地图的着色问题，这一直是拓扑学难题之一，到1976年才获得解决[2]. 拓扑学中的"麦比乌斯带"（Möbius strip）也很出名.

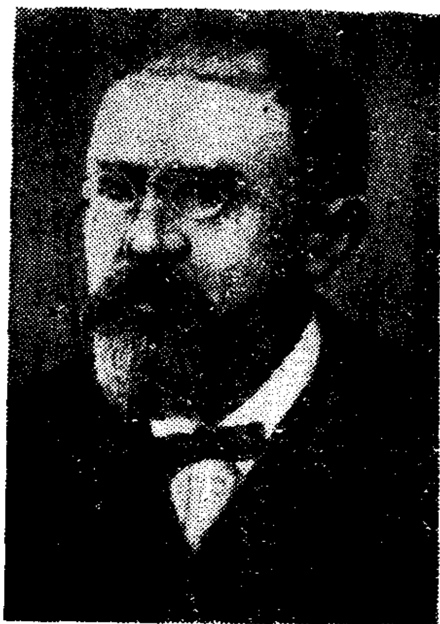
拓扑学最早的论著是里斯丁（Johann Benedict Listing, 1808—1882，德国人）的《拓扑学初步》（Vorstudien zur Topologie, 1848）. 他是高斯的学生，1834年以后是格廷根大学教授. 他本想称这个学科为"位置几何学"，但这个名称已被斯陶特用来指射影几何. 于是改用"Topologie"这个

〔1〕介绍"七桥问题"的书很多. 见（1）孙泽瀛《数学方法趣引》(1956) p.1.（2）H. Steinhaus《数学万花镜》，裘光明译，(1952) p. 90.（3）姜伯驹《一笔画和邮递路线问题》(1962) p. 5.（4）Claude Berge《图的理论及其应用》，李修睦译，(1965) p. 171.（5）F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p. 323.

〔2〕本书第十二章第二节. p.305.

字[1]. 同这个字相近的 Topographie (英文是 topography) 是地形学的意思, 因此 Topologie 暗指和地形、地势相类似或有关的学科. 后来变成专有名词, 英文是 topology(有时也叫 analysis situs),日本称为位相几何学.我国曾译为形势几何学, 又译为连续几何学. 1956年《数学名词》确定为拓扑学, 它是 Topologie 的音译[2].

里斯丁以后, 黎曼把拓扑学的概念引入复变函数论中, 发展成黎曼曲面论, 对后来拓扑学和复变函数都有很大影响.



庞加莱(Poincré)

早期的拓扑学明显地分为两支, 一是点集拓扑, 以康托尔的贡献为起点. 另一支是组合拓扑 (或代数拓扑), 是上世纪末庞加莱 (Henri Poincaré, 1854.4.29—1912.7.17)所首创. 庞加莱是近代法国大数学家, 创作很多. 两支有统一的趋势, 后来又出现了微分拓扑.

拓扑学是新兴的学科, 它很快就渗透到各个领域里去. 著名的学者有荷兰的布劳尔 (Luitzen E. J. Brouwer,

〔1〕 Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) p. 1164.

〔2〕 拓扑这个词是姜立夫教授首先创用的, 后来经江泽涵教授提倡, 成为通用的术语.

1881—1966)，法国的夫列谢(Maurice Fréchet, 1878—1973)，瑞士的荷普夫 (Heinz Hopf, 1894—1971)，德国的豪斯多夫，波兰的谢尔品斯基 (Wacław Sierpiński, 1882—1969)、库拉托夫斯基，美国的末勃仑(Oswald Veblen, 1880—1960)、亚历山大 (James Waddell Alexander, 1888—1971)、列夫舍兹 (Solomon Lefschetz, 1884—)，苏联的亚历山大洛夫 (Павел Сергеевич Александров, Paul S. Alexandroff, 1896—)、乌利松 (Павел Самуилович Урысон, 1898—1924)、邦德列雅金等。

第十章 微积分

第一节 微积分名称的来源

牛顿和莱布尼兹是微积分的奠基人。牛顿称微积分为“流数术”(fluxions)，这名称后来逐渐被淘汰。莱布尼兹在著作中使用了“calculus differentialis”(差的计算)与“calculus summatorius”(求和计算)的术语。拉丁文 calculus 原来是石子的意思，古代欧洲人用石子来进行计算，正象我国用算筹一样。后来“计算”、“演算”就叫做 calculus．而“差的计算”变成了专门的术语“微分学”(英文 differential calculus，德文 Differentialrechnung)。莱布尼兹的一位朋友约翰·伯努利主张把“求和计算”改为“求整计算”(calculus integralis)，后来成为专门术语“积分学”(英文 integral calculus，德文 Integralrechnung)．这就是西方微分学、积分学名称的来源。两者合起来叫微积分，在英文里简称为 calculus。

世界上第一本系统的微积分著作是洛彼塔的《无穷小分析》(Analyse des infiniment petits，1696)。于是“无穷小分析”或简称“分析”又成为微积分的别名。不过“分析”或

"数学分析"有时是在更广的意义下来使用的。[1]

1748年，欧拉的名著《无穷小分析引论》出版以后，"分析"的名称更加通行。不过欧拉同时也使用微分学、积分学的名称。

我国第一本微积分学的汉译本，是李善兰和伟烈亚力(Alexander Wylie，1815—1887)合译的《代微积拾级》十八卷，[2] 1859年5月10日(清咸丰九年四月初八日)在上海墨海书馆印行。原书是罗密士(Elias Loomis，1811—1889，美国人)著的"Analytical Geometry and Calculus"(1850)。译名的"代"指的是解析几何(当时叫代数几何)，"微"指"微分"，"积"指"积分"。"calculus"译作"微积"。

序中说："我国康熙时，西国来本之(今译莱布尼兹)、奈端(今译牛顿)二家又创微分、积分二术，……其理大要：凡线面体皆设为由小渐大，一刹那中所增之积即微分也。其全积即积分也。"这就是我国微积分名称的起源。

汉徐岳《数术记遗》里面有"不辨积微之为量，讵晓(怎能知道)百亿于大千"的话。李善兰也许就是借用这里微积的字样来翻译"calculus"的。

---

〔1〕见本书第十一章。p.265。

〔2〕李俨《中算史论丛》第四集(1955)p.346。又梅荣照《我国第一本微积分学的译本〈代微积拾级〉出版一百周年》，载《科学史集刊》(1960)第3期。

第二节　微积分出现的前夕[1]

微积分的出现，与其说是整个数学史，不如说是整个人类历史的一件大事。它从生产技术和理论科学的需要中产生，同时又回过头来深刻地影响着生产技术和自然科学的发展。假设我们现在把微积分从工程技术、天文、物理等学科中抽去，那将是不可想象的事。微积分对今天的自然科学工作者来说，越来越象望远镜之于天文学家，显微镜之于生物学家一样重要了。

微积分并不是凭空产生的，它经过相当长时间的酝酿，最后经牛顿、莱布尼兹的手而完成。恩格斯指出：“它们（微积分）也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的，但不是由他们发现的”。[2]

积分的思想，早在希腊时代已经萌芽。公元前 5 世纪，德谟克利特创原子法，把物体看作由大量微小部分叠合而成，从而求得锥体体积是等底等高柱体的 1／3．阿基米德在解决抛物线弓形和回转锥线体(concoid) 体积的问题中隐含着近代积分学的思想。作为整个数学分析基础的极限论，也不止一次在各

---

〔1〕参考(1)原种行、清水英一《数学史新讲》第二章，《解析法の出现》(1940)．(2)А.П. Юшкевич《微分学简史》罗国光译，载《数学通报》(1954.6) pp. 24—29．(3)А.П. Юшкевич《积分学简史》罗国光译，载《数学通报》(1955.2)pp.29—35.

〔2〕《自然辩证法》“札记和片断”〔数学〕，译本(1971)p. 236，原文见柏林(1959)版p.275.

代的著作中出现. 庄子《天下篇》"一尺之捶", 刘徽的割圆术, 齐诺的悖论, 攸多克萨斯的"穷竭法", 祖暅的开立圆术(祖暅原理), 都和极限有直接联系. 他们有意无意地引用了一些极限方法, 并隐约地体会到这种方法的重要性. 但一直到17世纪微积分产生的初期, 数学家还是觉得极限观念玄妙不可捉摸. 与此有关的无穷大、无穷小也是这样. 人们过去习惯于处理常量和有限的对象. 一遇到无穷, 往往就束手无策. 从常量到变量, 从有限到无穷, 正是从初等数学过渡到高等数学的关键.

作为微分学中心问题的切线问题的探讨, 却是比较晚的事. 换句话说, 微分学的起点远远落在积分学之后. 从这一个例子可以看出一种科目的学习顺序并不常常和历史发展的顺序一致, 现在的教科书通常是把微分学写在积分学前面的.

17世纪的有名数学家(主要在法国)如费马、笛卡儿、罗伯瓦(Gilles Persone de Roberval, 1602.8.8—1675.10.27)、笛沙格等人都曾卷入"切线问题"的论战中. 笛卡儿和费马从几何的角度出发, 认为切线是当两个交点重合时的割线, 罗伯瓦则从运动的角度出发, 将切线看作描画这曲线的运动在这点的方向. 这两种不同的观点, 有趣地构成流数术和微分法的序幕[1].

罗伯瓦的观点至今在力学中还有实际意义, 费马的看法和现代的切线定义稍有出入, 事实上切线只是割线的极限, 它本身并不是割线. 无论如何, 费马求极值的方法, 已得到微分法的要领.

---

[1] Encyclopaedia Britannica, vol. Ⅶ(1877) p.121.



卡瓦列利 (Cavalieri)

牛顿、莱布尼兹之前，还有许多学者在这方面做了一系列的工作。我们举出比较重要的卡瓦列利、瓦里士、和巴鲁。

卡瓦列利(Bonaventura Cavalieri) 1598年生于意大利米兰(Milan)，1647年11月30日卒于波伦那 (Bologna)。他是17世纪意大利数学家之中影响最大的，是伽利略的学生，波伦那大学教授(1629—1647)。著有锥线论 (1632)、三角学 (1632)、光学、天文学等书。他是最早认识对数价值的人之一。他的最大贡献是"不可分原理"(Principle of indivisibles)，这原理颇受刻卜勒的影响，在1629年公布，6年后公开出版，这就是《连续不可分几何》(Geometria Indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota，1635年波伦那出版)。

卡瓦列利的理论是攸多克萨斯穷竭法到牛顿、莱布尼兹微积分的过渡，是以下面的主张为基础的：一条线由无穷多个点构成，一个面由无穷多条线构成，一个立体由无穷多个面构成；点的运动产生线，线的运动产生面，面的运动产生体。这种理论便是微积分原始的雏形。依靠它，卡瓦列利求得相当于曲线 $y=x^n$ 下的面积，解决了很多现在可以用更严密的积分

法解决的问题．在这里他还提出了后来以他名字命名的“卡瓦列利原理”[1]．

卡瓦列利的方法受到瑞士数学家古尔丁（Paul Guldin, 1577.6.12—1643.11.3)的猛烈抨击．同时，卡瓦列利也指出古尔丁关于后来叫做“古尔丁定理”论证中的弱点．古尔丁原先是一个金匠，著有物理与数学的书（1622），最出名的是关于巴普士定理的著作（1635），其中载有现今微积分书中所盛称的“古尔丁定理”：平面图形绕同一平面内且不与之相交的轴回转，所生的体积等于这图形面积乘以图形重心所描画出的圆周的长．古尔丁没有证明他的定理，而卡瓦列利却用不可分原理把它证明出来．

瓦里士（John Wallis),1616年11月23日生于英国肯特（Ashford Kent)，1703年10月28日卒于牛津（Oxford)．他是最富独创性的数学家之一．早年在剑桥学神学，从1649年起是牛津大学的“沙维教授”(Savilian professor)．[2]

16、17世纪，学会、学院（科学研究机关）相继建立．最早的一个是1560年在那不勒斯（Naples，意大利半岛西海岸）成立的“自然奥秘学院”（Accademia Secretorum Naturae)，英国“促进自然知识的皇家学会”(The Royal Society of London Promoting Natural Knowledge) 成立于1662年，瓦里士是创立委员之一．

瓦里士有很丰富的著作，他的《圆锥曲线论》第一次摆脱

---

〔1〕见本书第十六章第二节．p．406．

〔2〕沙维(Henry Savile, 1549.11.30—1622.2.16)是牛津大学很有声望的教授．这是依照他的遗嘱设立的荣誉职．每年有若干津贴．

过去视锥线为锥面截线的看法．定义锥线为二次曲线，并熟练地运用了笛卡儿坐标法去讨论它．具有头等重要性的工作是他的《无穷小算术》(Arithmetica Infinitorum，1655年，牛津出版)．瓦里士在这本书中大大扩展了卡瓦列利的不可分原理．

牛顿建立带有任意有理指数的二项式定理，是由寻求曲线$y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$下面积所引起的．这在1676年10月24日牛顿给莱布尼兹的信中提到．求 $y=(1-x^2)^0$，$y=(1-x^2)^1$，$y=(1-x^2)^2$，$y=(1-x^2)^3$ 等曲线下的面积，是瓦里士已经完成的工作．他得到的结果是 x，$x-\frac{1}{3}x^3$，$x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$，$x-x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$等等．实质上瓦里士已经完成了相当于$\int_0^x(1-x^2)^n dx$的积分，可惜没有进一步把 n 推广到分数．牛顿研究 $n=\frac{1}{2}$的情形，导致二项定理的发现．

瓦里士根据前面的结果，通过迂回繁杂的计算，得到以瓦里士命名的 π 的无穷连乘积表达式：

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdots},$$

即
$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

随后，瓦里士的朋友布朗克（William Brouncker，约1620—1684.4.5）从这连乘积式出发导出一个美妙的连分数表达式

$$\pi=\frac{1}{1}+\frac{1^2}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{5^2}{2}+\frac{7^2}{2}+\cdots$$

在瓦里士《无穷小算术》中记作[1]

$$\square = 1\frac{1}{2\frac{9}{2\frac{25}{2\frac{49}{2\frac{81}{2}\ \&C.}}}}$$

巴鲁[2]也是微积分的先驱者．他引入“微分三角形”，给出求切线的方法．巴鲁的符号 $a:e$，相当于现在的$\frac{dy}{dx}$．e 相当于 dx，a相当于 dy．以曲线 $y^2=px$ 为例，设 x 取得一无穷小增量 e，则y得到一个相当的无穷小增量 a，于是

$$y^2+2ay+a^2=px+pe,$$

又因 $y^2=px$，故 $2ay+a^2=pe$，忽略无穷小 a 的高次项即得

$$a:e=p:2\sqrt{px}=\sqrt{px}:\text{次切距},$$

由此求出次切距等于 $2x$．巴鲁的方法和现在微分法的差异仅仅在于符号的不同．因此有些学者甚至断言巴鲁是微分学的真正发明人[3]．

此外，巴鲁还求得相当于

$$\int_0^\theta \mathrm{tg}\theta d\theta=\ln\ \sec\theta$$

〔1〕F.Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1929) p.51.

〔2〕见本书第四编二．p. 473.

〔3〕J.M. Child, The Geometrical Lectures of Isaac Barrow (1916) 序言． F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p. 189. Carl B. Boyer,《微积分概念史》(The Concepts of the Calculus) 译本，(1977) pp. 193—196.

一类的积分式。

在其他的国家里，也可以看到若干类似微积分的痕迹。例如印度10世纪的曼朱拉（Manjula, 932年）得到相当于$d\sin\theta = \cos\theta d\theta$的关系。尼拉堪塔（Nîlakantha，约1500年）导出相当于

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\sin\theta = -\sin\theta$$

的结果[1]。

又日本学者认为“日本算圣”关孝和(Seki Kōwa, 1642.3—1708.10.24）的“圆理”实际已得到微积分的要旨[2]。

如果不是某些阻碍数学发展的因素（诸如社会原因）的存在，微积分完全有可能在这些地区（包括中国）[3]独立发展起来。

第三节 微积分的创始

微积分的学理在牛顿、莱布尼兹之前已散见于各国的著作中，然而系统、大规模地应用微积分方法却是17世纪最后三十多年的事。牛顿和莱布尼兹最大的功绩是将两个貌似不相关的问题联系起来，一个是切线问题（微分学的中心问题），一个

〔1〕A.N. Singh, The Theory and Construction of Non-differentiable Functions (1935) p.3.

〔2〕参考（1）加藤平左エ门《行列式及圆理》(1940)。（2）林鹤一《和算研究集录》(上)(1936)pp. 786—827，《关孝和ノ圆理》。（3）藤原松三郎《日本数学史要》(1952)第二篇第一章《关流数学》。

〔3〕顾今用《中国古代数学对世界文化的伟大贡献》，载《数学学报》(1975) 18卷1期 pp. 18—23。

是求积问题（积分学的中心问题）．建立了两者之间的桥梁——现今常称为“牛顿——莱布尼兹公式”．[1]

1665年5月20日[2]，在牛顿[3]手写的一页文件中开始有“流数术”的记载．微积分的出现，不妨以这一天为标志．

他称连续变量为“流动量”（fluents 或 flowing quantities），用v，x，y，z，等表示．称这些流动量的导数为“流动率”（或“流数”，fluxion of the fluent），或叫“速度”（velocities），“迅度”（celerities），用加小点来表示．如 $\dot{x}$ 表示 x 的流动率，$\dot{y}$ 表示 y 的流动率，余类推．

时间是所有流动量的自变量．$\dot{x}$，$\dot{y}$，…相当于莱布尼兹的 $\frac{dx}{dt}$，$\frac{dy}{dt}$，…．他还使用了“刹那”（moment），[4]这一名称，相当于 dx，dy，…．小点的符号在上述的手稿（1665.5.20）中已有，现在在某些场合下还使用，如在力学中用来表示对时间的导数．最早在印刷品中出现是牛顿校订的瓦里士《代数学》（De algebra tractatus, 1693）．

牛顿另一著作《曲线求积论》（Tractatus de quadratura curvarum, 1671完成，1704出版）重新解释他的符号：

---

〔1〕西方国家（除苏联外）更多地用“微积分基本定理”这个名称．内容稍有出入．

〔2〕相当于格里历1665.5.31．

〔3〕见本书第四编二．p.473．

〔4〕moment 有极短促时间的意思，故译作“刹那”．牛顿《自然哲学之数学原理》，郑太朴译本(1931)译 moment 为“差率”(p.428)．也译作“契机”〔《数学通报》(1954.6) p.26〕或“瞬”(Carl B. Boyer《微积分概念史》译本 p.210)．日本细井淙《东西数学思想史》p.67 译作流体的“能率”．

$$\overset{||}{x},\ \overset{|}{x},\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x},$$

每一个是前一个的流动率（导数），是后一个的流动量（原函数）。[1]

牛顿的流数术，除了他的少数朋友之外，长久没有人知道。一直到1687年才用几何的形式摘记在他的巨著《自然哲学之数学原理》（Philosophiae naturalis principia mathematica，自序作于 1686.5.8）第二编第二章 § 10 “补题” 中[2]。而且避免用一切新的符号。

牛顿正式的流数术著作《流数术方法和无穷级数》（The Methods of Fluxions and Infinite Series），科尔生（John Colson）的英译本（原为拉丁文）在1736年（即写成后65年）才出版。

流数术所提出的中心问题是：（1）已知连续运动的路径，求给定时刻的速度（即微分法）；（2）已知运动的速度求给定时间内经过的路程（即积分法）。牛顿举下面的例来说明流动率的求法。

设给定函数 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$，时间的刹那（无穷小增量）用 0 表示（相当于时间的微分 dt），x，y 的刹那用 $\dot{x}$，$\dot{y}$ 乘上 0，即 $\dot{x}0$，$\dot{y}0$ 表示（相当于 $dx=\frac{dx}{dt}\cdot dt$，$dy=\frac{dy}{dt}\cdot dt$）。以 $x+\dot{x}0$ 及 $y+\dot{y}0$ 代 x，y，得

〔1〕F. Caiori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1929) p. 197.

〔2〕郑太朴第三版(1725)译本(1957) pp. 428—437.

$$x^3+3x^2\dot{x}0+3x\dot{x}0\dot{x}0+\dot{x}^3 0^3-ax^2-2ax\dot{x}0$$
$$-a\dot{x}0\dot{x}0+axy+ay\dot{x}0+a\dot{x}0\dot{y}0+ax\dot{y}0$$
$$-y^3-3y^2\dot{y}0-3y\dot{y}0\dot{y}0-\dot{y}^3 0^3=0.$$

由假设 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$，消去这些项后，全式除以 0，得

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-3y^2\dot{y}+3x\dot{x}\dot{x}0$$
$$-a\dot{x}\dot{x}0+a\dot{x}\dot{y}0-3y\dot{y}\dot{y}0+\dot{x}^3 00-\dot{y}^3 00=0.$$

因 0 是无穷小增量，弃去含 0 的各项，便得

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-3y^2\dot{y}=0.$$

在19世纪20年代以前，极限和无穷小的概念是不清楚的，这正是攻击微积分者的把柄。牛顿本人对无穷小的说法也时常改变。

在《曲线求积论》中，他又指出确定 x^n 的流动率的方法：

当 x 变成 $x+0$ 时，x^n 变成 $(x+0)^n$，展成级数

$$x^n+n0x^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}0^2x^{n-2}+\text{etc}.$$

自变量与函数的增量分别是

$$0 \text{ 与 } n0x^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}0^2x^{n-2}+\text{etc}.$$

二者的比是

$$1:nx^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}0x^{n-2}+\text{etc}.$$

令增量等于零，则 x 的流动率与 x^n 流动率的比是 $1:nx^{n-1}$。除了极限的说法外，大致和现在教科书的方法相同。

牛顿的《自然哲学之数学原理》是在哈雷（Edmund Ha-

lley, 1656.11.8.—1742.1.14)的鼓励和敦促下在1687年出版的,这是他一生主要工作的总结,也是科学史上一件大事。他的《广义算术》(Arithmetica Universalis)是1673—1683年间用讲义形式写成的代数学,1707出版。包含实系数方程虚根成对的证明。

目前教科书所称数字方程的"牛顿解法":设a是方程$f(x)=0$的第一近似根,则第二近似根是

$$a-\frac{f(a)}{f'(a)},$$

并不是牛顿发明的。他在《流数术方法和无穷级数》中给出例子$y^3-2y-5=0$,是用下面的逐次代换法来解的:

设$f(y)=y^3-2y-5$,由于$f(2)=-1$,$f(3)=16$,取2为第一近似根,与真值的差为p,则$y=2+p$。代入原式得

$$p^3+6p^2+10p-1=0. \qquad (1)$$

因p甚小,可略去高次项,从$10p-1=0$解得p的近似值0.1,再以$p=0.1+q$代入(1)得

$$q^3+6.3q^2+11.23q+0.061=0. \qquad (2)$$

略去高次项后得$q=-0.0054+r$,代入(2),略去r的高次项得$r=-0.0000485171$,于是得根$y=2.09455148$。[1]

1690年拉福生(Joseph Raphson, 1690—1715,英国人)在论文《一般方程分析》(Analysis aequationum universalis)中提出一种解法,和牛顿的解法相仿,但求得$P\approx0.1$后,以$2.1+q$代入原方程,略去q的高次项求得$q\approx-0.0054$,再将$2.0946+r$代入原式,略去高次项求出$r=$

[1] 原文最后一位是7,是计算的误差。

-0.0000485171，这相当于迭代法[1]

$$a^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

因此将这种迭代法改称为“牛顿—拉福生法”较符合历史事实。

莱布尼兹 (Gottfried Wilhelm Leibniz)[2] 1646年6月21日[3]生于德国东部的来比锡，1716年11月14日卒于汉诺威 (Hannover，德国西北部)，是另一个微积分的奠基者。他的学识包括哲学、历史、语言学、生物学、地质学、机械、物理、数学、神学、法律、外交和“发明的艺术”等等。他的多才多艺和我国的沈括有很多相似之处。

莱布尼兹1661年(15岁)入来比锡大学学习法律，同时以极大的勤奋去掌握各门科学。那时德国大学的水平是很低的，欧几里得几何学的教师讲解含糊不清，除了莱布尼兹外便没有人能听懂．高等数学是完全没有的．莱布尼兹在自己的努力下，1666年发表了一篇关于数理逻辑的论文，虽然是极不成熟的作品，但已显示出他的高度数学才能。以后投身于外交界，作广泛的游历，谈论时政，颇擅声誉。

1672年因外交事务赴巴黎，在那里接触到一些数学名流。特别是和惠更斯的交往，使年青的莱布尼兹学习高等数学之念油然而生。1673年莱布尼兹到伦敦去逗留了三个月，也会晤了一些数学界的人士。在这之后数年，莱布尼兹在公务之余，突

---

〔1〕 F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p. 203.

〔2〕 也拼作 Leibnitz, Leibnütz, Leibnitius, Leibnüzius 等。Leibniz 是一般德国科学著作中所用的拉丁拼法。

〔3〕 这个日子是儒略历，相当于格里历7.1。



莱布尼兹(Leibniz)

入数学领域，开始创造性的工作。1676年以后，莱布尼兹来到汉诺威，担任腓特烈公爵（Duke John Frederick）顾问及图书馆长。此后40年，常居留在汉诺威，直到1716年逝世。

莱布尼兹终生努力的主要动机是要寻求一种可以获得知识和创造发明的普遍方法。这种努力导致许多数学的发现。最突出的建树是微积分学。牛顿建立微积分主要是从运动学的观点出发，而莱布尼兹则从几何学的角度去考虑。特别和巴鲁（1670）的“微分三角形”（以 dx，dy，ds 为边的直角三角形）有密切关系。莱布尼兹称它为“特征三角形”（triangulum characteristicum）。

莱布尼兹第一篇微分学1684年（牛顿《原理》出版前3年）在《学艺》（Acta eruditorum）杂志上发表，这是世界上最早的微积分文献。这篇论文带有一个很长而古怪的标题：[1]“一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算”（Nova methodus pro maximis，…calculi genus）。

〔1〕17世纪的论文喜欢用很长的标题，已成为一种风气。

这篇仅6页纸，内容并不丰富，说理也颇含混的文章，却有着划时代的意义。它已含有现代的微分符号和基本微分法则：

$$d\overline{ax} \quad aequ. \ adx$$ [1] 即 $dax = adx$。

$$d\overline{z-y+w+x} \quad aequ. \ dz-dy+dw+dx,$$

$$d\overline{xv} \quad aequ. \ xdv+vdx$$ 等。

导数记作 $dx:dy$，但在1675年的手稿中记作 $\frac{dx}{dy}$ [2]，1676年记作 $\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$。后来在1693年的另一篇论文中用 $ddx: \overline{dy}^2$ 表2阶导数。1684年的论文还给出极值的条件 $dy=0$，和拐点的条件 $d^2y=0$。计算的规则只作简短的叙述而没有证明，加上印刷的错误，使人很难领悟其中奥妙。

1686年，莱布尼兹在《学艺》上发表第一篇积分学。他是历史上最大的符号学者之一。[3]他所创设的微积分符号，远远优于牛顿符号，这对微积分有极大的影响，正象印度—阿拉伯数码的采用促进算术、代数的发展一样。在这篇最早的积分学论文中，并没有我们今天的积分号 $\int$，在印刷品中出现的积分号倒很象现在的“f”。这是“S”字母小楷当时的印刷体。不过

〔1〕aequ. 相当于等号=，见 F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1929) p. 187.

〔2〕横坐标和纵坐标的文字和现在恰好相反。

〔3〕莱布尼兹是符号逻辑（即数理逻辑）的创始人之一。见莫绍揆《数理逻辑的简单介绍》，载《数学通报》(1964.2) p.41.

$\int$号确在11年前已经创设，大概是制版不便，印刷时没有用。

1675年10月26日的手稿还没有出现积分号，莱布尼兹用 omn.l 表示 l 的总和(积分)，omn. 是 omnia（所有，全部）的缩写。三天以后，在1675年10月29日另一手稿上写道：“将 omn.写成$\int$更有用，omn.l 写成$\int l$，即所有 l 的总和（summa）。” $\int$就是字母 S 的拉长。

在这同一手稿中，还写着“假设$\int l$ ⊓ya.（⊓是等号）则令 l ⊓ $\frac{ya}{d}$. ……$\int$表示和，d 表示差（differentia）”。1675年11月11日的手稿上说：“dx…… 表示两个相邻的 x 间的差。”

当时看懂这些文章的很少。苏格兰的克累格(John Craig)是最早接受这种新思想的两个人之一。他在1685年采用了莱布尼兹的概念和符号。三十多年后，由于英国人的固执，加上对牛顿的盲目崇拜，放弃这种符号而改用牛顿的“流数术”。另一个是瑞士的雅各·伯努利（Jacob Bernoulli，1654—1705），他将莱布尼兹的方法发扬光大。从那时候起，数学进入一个空前的丰收时期。

第四节 微积分引起的争论

微积分出现以后，逐渐显出它非凡的威力，过去很多初等数学束手无策的问题，至此往往迎刃而解。恩格斯很重视微积

分在自然科学中的作用，他指出："只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，并且也表明过程：运动。"[1]

人们在欣赏其宏伟功效之余，不免要注意到它的创立者，事情本来很简单，牛顿、莱布尼兹总结了前人的工作，各自独立完成了这一空前盛业．但由于狭隘的民族偏见，竟引起绵延一百多年的无谓争端．

1673年莱布尼兹第一次到伦敦，曾和皇家学会的会员接触．回到德国后，在1674年写信告诉皇家学会秘书奥丁堡(Henry Oldenburg，1615—1677)，说他用无穷级数得到一个极端重要的关于化圆为方问题的定理．这是指表 π 的无穷级数：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

奥丁堡回信说牛顿和格列哥里 (James Gregory，1638.11—1675.10，苏格兰人) 都曾发现求面积的方法，并用到圆上去．[2]莱布尼兹很想知道这种方法．1676年6月13日牛顿答复询问，经奥丁堡转一信给莱布尼兹，其中载有二项定理及正弦、反正弦的展开式，还有椭圆弧的无穷级数展开式．

1676年8月27日莱布尼兹请求将较全面的解释和证明给他．1676年10月24日牛顿回一长信，叙述无穷级数、内插法及用二项定理求得曲线形面积和弧长．并说他在瘟疫迫使他离开剑桥(1665—1666)之前已发现这种方法．但在这一封信中没有

〔1〕《自然辩证法》译本，(1971)p.249，原文(1959)柏林版，p.290．

〔2〕指格列哥里1667年得到 arctgx 的展开式，令 x＝1 即得莱布尼兹的公式．

解释这一方法.

1677年6月21日莱布尼兹回信解释求切线的方法，引入他的记号 dx，dy 表示无穷小量. 他给出几个切线反问题的例子，相当于一阶微分方程. 这充分说明已知道积分法的原理.

在1675年10月26日及1675年10月29日的手稿中已出现莱布尼兹的微分、积分符号. 这日期的重要性在于它无可争辩地证明了莱布尼兹在没有得到牛顿任何报道之前已掌握这一方法. 也证明了他剽窃牛顿发明的说法是无稽的. [1]

1684年莱布尼兹发表微分法，1686年发表积分法. 牛顿的流数术到1687年才以几何形式首次出现在《原理》中，而《流数术》本身直到他死后9年（1736）才印刷出来.

以发明的时间来说，牛顿是先行者(早10年)，但莱布尼兹却较早公布（早3年）.

1699年，由瑞士人丢利埃（Nicolas Fatio de Duillier, 1664.2.16－1753.5.10)首先引起争端.他断言牛顿比莱布尼兹早很多发明了微积分，而后者可能是剽窃，这掀起一场轩然大波. 1700年5月莱布尼兹在《学艺》上予以反驳. 以后陆续争辩了很多年. 牛顿和莱布尼兹死后，他们的信徒和崇拜者还争论不休. 现在看来，这种争论没有什么价值，反倒使英国的微积分发展推迟了若干年.

大陆派的学者在接受了莱布尼兹优越的符号以后，在伯努利家族，欧拉、达朗贝尔、拉格朗日、拉普拉斯诸大家的发扬光大下，很快地获得丰硕的成果，渗透到各个数学部门中去.

---

〔1〕《大英百科全书》(Encyclopaedia Britannica) vol. Ⅶ (1877) pp.8—10.

英国学者一半出于对牛顿的迷信，一半出于狭隘的民族偏见，拘泥于牛顿的流数术，故步自封，迟迟不肯接受大陆的成就，其进展相应地落后了。这是一个历史教训！

打破这个窘境的还是剑桥的一些数学家，以其中的巴培治(Charles Babbage, 1792.12.26—1871.10.18，剑桥的"路卡斯教授"[1])的话来说是：用"d 主义"对抗"点时代"。[2]起先这运动遭受严厉的批评。1816年巴培治等翻译法国拉克瓦(Sylvestre François Lacroix, 1765—1843.5.24）的《初等微积分》(1802）成英文，才引起英国派学者的重视，开始采用莱布尼兹记号，这已在微积分产生后整整一个半世纪了。

微积分引起另一方面的争论，是带有建设性意义的。这就是它的理论基础问题。

历史上任何一项重大理论的完成，都是经过若干年辛勤培植的结果，不可能一开始就完整无瑕。17世纪微积分的新生也带着逻辑上的重大困难，以致遭受多方面的非议。

微积分的基础是极限论，而牛顿、莱布尼兹的极限观念是十分模糊的。牛顿的"刹那"或无穷小量，有时是零，有时不是零而是有限的小量。莱布尼兹的dx，dy 也是不能自圆其说的。[3]究竟极限是什么？无穷小是什么？这些问题在今天任何一个学过微积分的人看来是容易回答的，但在19世纪以前却是数学上带有根本性质的难题。

---

[1] 这是当年牛顿担任过的职务。

[2] "d 主义"(d-ism)指大陆微积分；"点时代"(dot-age）指流数术。Dirk J. Struik, A Concise History of Mathematics (1954) p.258. 关娴译本《数学简史》(1956)p.148.

[3] 马克思称这个时期的微分学为"神秘的微分学"。见《数学手稿》北大译本(1975)p.85.

鼎鼎大名的主观唯心论哲学家贝克莱（George Berkeley，1685—1753，爱尔兰的主教）便是抨击微积分基础最有力的人物．他愤恨牛顿的科学给唯物论以支持，于是向流数术开火，极尽讥讽挖苦之能事．他的目的是企图证明流数术的原理并不比基督教的教义更加清楚．

牛顿的挚友哈雷是不信仰宗教的，他曾戏谑基督教的神学．贝克莱的朋友在病床上拒绝宗教祈祷的慰藉，因为伟大的数学家哈雷使他很难相信基督教的教义．贝克莱于是决心写书来反击这不信神的数学家哈雷．

1734年，贝克莱出版了一本书，标题很长：《分析学家：或一篇致不信神数学家的论文，其中审查一下近代分析学的对象、原则及论断是不是比宗教的神秘、教义的主旨有更清晰的陈述，或更明显的推理》．在这本书里他嘲笑无穷小量是“已死量的幽灵”（ghosts of departed quantities）．

贝克莱说：如果 x 取得一个增量 i．这里 i 代表某一不为零的量，那 x^n 的增量被 i 除是

$$nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}i+\cdots$$

现在令 $i=0$，求出 x^n 的流动率（导数）nx^{n-1}．这时假设突然改变，因为 i 原先是假定不为零的．这简直是“瞪着眼睛说瞎话”（manifest sophism）．[1]

贝克莱认为高阶导数更加神奇莫测，他继续大声疾呼：“谁要仔细体会一下二阶或三阶流动率，二阶或三阶微分，我想，他就没有必要斤斤计较上帝的任何细节了．”

〔1〕直译为“明明白白的诡辩”．

利用科学上危机性的困难来加强唯心主义哲学，这并不是唯一的例子。

格兰弟（Luigi Guido Grandi, 1671.10.7—1742.7.4，意大利的僧侣）是比萨大学的哲学及数学教授，他把

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$$

这样的式子看作是“从虚无创造万有”的象征。他得出$\frac{1}{2}$的结果，是设想一个父亲将一块珍宝遗留给两个儿子，每人轮流保管一年，所以每人应得$\frac{1}{2}$。[1]

欧洲大陆方面，正象牛顿的模棱两可招致贝克莱的攻击一样，莱布尼兹的含混也触发了尼文太（Bernard Nieuwentijt, 1654—1718，荷兰哲学家，曾任市长）的反对（1694）。他否认高阶微分的存在，也不赞成略去无穷小量。当时莱布尼兹还在世，但没有作出圆满的答复。

在反对微分学的人中，也不乏具有才能的数学家。法国代数学家罗尔（Michel Rolle, 1652.4.21—1719.11.8）便是一例。他1691年在《方程的解法》（Methode pour vésoudre

[1] Dirk J. Struik, A Concise History of Mathematics(1954) p.177. 其实如果他用下述的“推理”，就更有说服力：$x=1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-x$，故$x=\frac{1}{2}$。还可以有另一种说法，$x=1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1-0-0-\cdots=1$，但$x=(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots=0$，于是$1=0$，0是虚无，1是“一切”，即万有。

les egalitez) 中指出：在 $f(x)=0$ 两个相邻的实根之间，$f'(x)=0$ 至少有一个实根，其中 $f(x)$ 是多项式.[1]这定理本来和微分学无关，后人将 $f(x)$ 推广于可微函数，冠以罗尔的名称，作为微分学的定理，这已在一百多年之后了.[2]

贝克莱和尼文太的攻击纯粹是消极的，他们不能给微积分以严格的基础，但他们的论点都有一定的道理，它激起了进一步的建设性工作.

尽管微积分兴起的初期有一些逻辑上的缺陷，但实践是检验真理的唯一标准，它在实践方面的胜利，足以使人们信服.连贝克莱也不得不在事实的面前低头.他说："流数术是一把万能的钥匙，借着它，近代数学家打开了几何以至大自然的秘密."[3]而大部分数学家则暂时搁下逻辑基础不顾，勇往直前地去开辟这新的园地.达朗贝尔有一句名言，足以表征这时代的精神："向前进，你就会产生信念"(Allez en avant, et la foi vous viendra)![4]

---

〔1〕英译文见 D.E. Smith, A Source Book in Mathematics (1959) pp. 253—260. 这事实可能胡德（Johann Hudde, 1633—1704）已经知道(1659)，见L.E. Dickson, Elementary Theory of Equations, p.93.

〔2〕"罗尔定理"的名称最早为德罗比什（M.W. Drobisch, 1802—1896, 德国人）在1834年所用.

〔3〕E.T. Bell, Men of Mathematics (1937) p.90.

〔4〕А.Я. Хинчин(1894—1959)《数学分析简明教程》译本，p.667《历史简述》.

第十一章　数学分析进一步的发展

数学分析有时被用作微积分的同义语．在更多的场合下，它是微积分、级数论、函数论、微分方程、积分方程、变分法、泛函分析等学科的总称，也叫做分析数学．

第一节　微积分、微分方程、变分法

17、18世纪的数学史，几乎全部是数学分析的历史．绝大部分数学家的注意力，被这新兴的、有无限发展前途的学科所吸引．在这一方面有特殊功劳的，首先是瑞士的伯努利家族，欧拉，拉格朗日等人．



泰勒(Taylor)

英国继承了牛顿的遗产，也有一些值得称道的工作．泰勒(Brook Taylor,1685.8.18—1731.12.29)生于伦敦北部的艾德蒙吞(Edmonton)，学于剑桥，后来是皇家学会

的秘书。1712年7月26日他写信给马青 (John Machin, 1680—1751), [1] 提出"泰勒级数":

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots.$$

3年以后(1715),载在他的名著《增量方法》中。在他的证明中,根本没有提到收敛性问题,因为当时还没有认识到讨论级数收敛发散的必要性。严格的证明是柯西在一个多世纪以后给出的。

泰勒级数的重要性,半个世纪以后才为拉格朗日所认识。它是函数项级数中最简单的一种——幂级数。幂级数之所以重要,是由于它的部分和是多项式。如果一个函数能够展开成幂级数,它就可以用多项式来逼近。

后来拉格朗日试图以泰勒级数作为全部分析学的基础。又过了一个半世纪,维尔斯特拉斯用幂级数的观点建立起复变函数论。

马克劳林 (Colin Maclaurin, 1698.2—1746.6.14, 苏格兰人) 在他的《流数术》 (Treatise of Fluxions, 1742) 中载有"马克劳林级数":

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots,$$

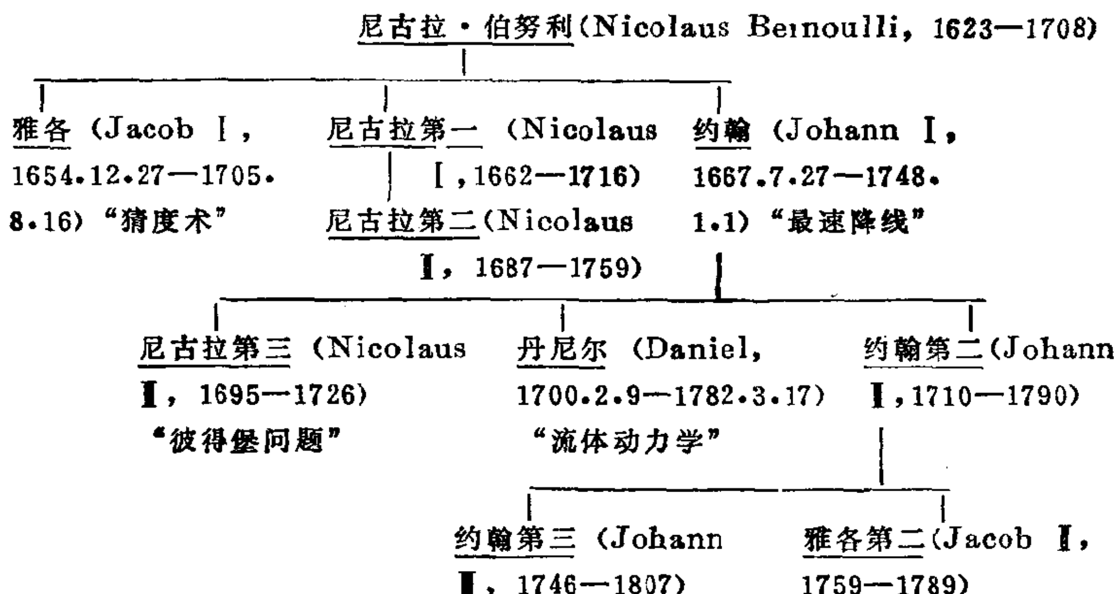
这是泰勒级数的特例,而且在1730年已为斯特灵 (James Stirling, 1692—1770.12.5) 所知。

---

[1] 伦敦格累沙姆 (Gresham) 学院天文学教授。曾用"马青公式" $\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ 算得100位圆周率(1706)。

伯努利是瑞士巴塞尔的数学大家族．历史上很难找出祖孙四代，数学家数十人的家族．我国的梅文鼎家族差可媲美．

这个家族的主要成员的世系如下〔伯努利（Bernoulli）是共同的姓，为简单起见，第二代以下只列名〕：[1]



最重要的是雅各、约翰和丹尼尔．

雅各·伯努利(Jacob Bernoulli)[2] 从1687年起直到逝世，是巴塞尔大学教授．他和弟弟约翰·伯努利(Johann Bernoulli)[3] 是莱布尼兹的朋友．他们迅速接受了莱布尼兹的学说，并加以发扬光大．

雅各在《学艺》上发表一系列重要的论文，1694年他首次给出直角坐标和极坐标的曲率半径公式．这也是系统地使用极坐标的开始．1690年他提出悬链线（catenary）问题，后来

〔1〕E.T. Bell, Men of Mathematics (1937) p.132.

〔2〕Jacob 是德文拼法，英文是 James，法文、拉丁文是Jacques，Jacobus.

〔3〕也拼作 John, Jean.



雅各·伯努利 (Jacob Bernoulli)

惠更斯、莱布尼兹和雅各的弟弟约翰都得到了解答．雅各又改变问题的条件，解决复杂的悬链问题，1694年的论文讨论了双纽线的性质，"伯努利双纽线"(Lemniscate of Bernoulli, $r^2=a^2\cos 2\theta$) 之名由此而起．

雅各对对数螺线(logarithmic spiral, $r=a^\theta$) 有深入的研究，他发现经过各种变换后，结果还是对数螺线．如对数螺线的渐屈线和渐伸线都是对数螺线；自极点至切线的垂足轨迹也是对数螺线；以极点为发光点经对数螺线反射后得到无数根反射线，和所有这些反射线相切的曲线叫回光线(catacaustic)，它还是对数螺线．他在惊叹欣赏这曲线神奇巧妙之余，效法阿基米德，在遗嘱里说要将对数螺线刻在墓碑上，以作永久纪念．并附以颂词："虽然改变了，我还是和原来一样！" (Eadem mutata resurgo)

雅各·伯努利的巨著《猜度术》 (Ars Conjectandi, 1713)的出版是概率论史的一件大事．这里出现了"伯努利数"，它有很多应用．雅各曾用来求出开头1000个自然数10次方的总和，结果是32位数字91,409,…,500![1]．

雅各原来学神学，约翰学医学，后来两人都改行从事数学

[1] G. Chrystal, Algebra, Part Ⅱ (1900) p.233.

研究。约翰1705年成为巴塞尔大学教授，在那里工作了43年之久。



约翰·伯努利(Johann Bernoulli)

1696年约翰·伯努利向全欧洲数学家挑战，提出一个很难的问题："设在垂直平面内有任意两点，一个质点受地心引力的作用，自较高点下滑至较低点，不计摩擦，问沿着什么曲线，时间最短？"[1]

这就是"最速降线"(Brachistochrone)[2]问题。它的难处在于和普通的极大极小值求法不同，它是要求出一个未知函数（曲线），来满足所给条件。这问题洛彼塔，雅各·伯努利，莱布尼兹和牛顿都得到了解答。雅各的解法是十分浅显的，和费马的光学原理有关。[3]

当时的数学家立刻被这问题的新颖所陶醉，后来欧拉和拉格朗日发明这一类问题的普遍解法，引起一个新的数学部门的产生，这就是变分法（calculus of variations)。

---

〔1〕1696.6发表于《学艺》，原文为拉丁文，英译文见D.E.Smith, A Source Book in Mathematics (1959) pp.644—655.

〔2〕源出于希腊文 βράχιστος（最短）及 χρόνος（时间）。

〔3〕R.Courant, H.Robbins,《近代数学概观》(What is Mathematics)(三)杨宗磐译，(1951) p.90.



洛彼塔(l'Hospital)

微分方程和微积分的产生，很难分出先后。纳皮尔发现对数，实质上已近似解出了微分方程 $\frac{d(a-y)}{dt}=y$。牛顿几乎在建立微积分的同时，便用无穷级数解一阶微分方程。莱布尼兹和伯努利兄弟同样也在这方面作了很多推进。他们在1696—1697年解决了雅各·伯努利提出的"伯努利方程"：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)y^n,$$

并指出经代换后可化为线性方程。[1]

他们成功地将大量的方程化为可解的。积分因子导源于欧拉，封田（Alexis Fontaine, 1704—1771），克雷罗（Alexis Claude Clairaut, 1713.5.7—1765.5.17，法国人）等人的工作。克雷罗1734年提出以他的名字命名的方程：

$$y=xy'+f(y').$$

---

〔1〕А.П.Юшкевич《历史概略》，载 В.В.Степанов《微分方程教程》，卜元震译（1959）. Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) chap.21.



丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli)

从1728年起欧拉开始讨论二阶方程的解.[1]表示振动弦的形状是最早受到注意的偏微分方程，它是二阶的方程. 1746—1748年为达朗贝尔与欧拉所讨论. 拉格朗日完成它的解，并在1772—1785年间的一系列论文中讨论一阶偏微分方程.

欧拉是约翰·伯努利的得意学生. 约翰的另一个得意学生是洛彼塔(Guillaume François Antoine de l'Hospital, 1661生于巴黎，1704.2.2卒于巴黎). 在他的《无穷小分析》中有求分子分母同趋于零的分式极限的“洛彼塔法则”，这是约翰·伯努利在1694年写信告诉他的.[2]

约翰的两个儿子尼古拉·伯努利(1695—1726)和丹尼尔·伯努利(1700—1782)在1725年同被邀请到彼得堡去. 尼古拉在那里提出一个概率论的问题，后来以“彼得堡问题”闻名于世. 可惜他次年就以韶华时光死在那里.

丹尼尔·伯努利成为彼得堡科学院的数学教授，那时才25

---

[1] D.E.Smith, A Source Book in Mathematics (1959) p.638.

[2] F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p.222.


达朗贝尔(D' Alembert)

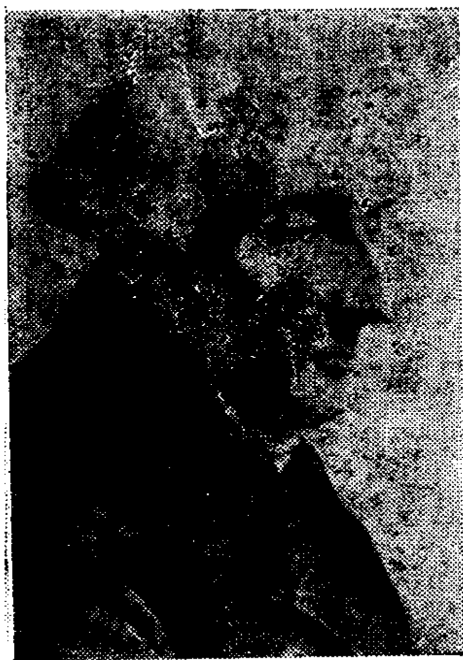
岁．他最早的论著(1724)是解决黎卡提(Jacopo Francesco Conte Riccati, 1676.5.28—1754.4.15，意大利人）所提出的"黎卡提方程"(1724)：$\frac{dy}{dx}=A+By+Cy^2$（A, B, C 是 x 的函数）．

丹尼尔在概率论、偏微分方程、物理、流体动力学等方面都有贡献．曾荣获法国科学院奖金10次之多，当时就享有盛名．他的《流体动力学》(Hydrodynamica) 1738年出版，这是作为流体动力学基础的"伯努利定理"的出处．

整个18世纪的数学特别是分析学的发展和欧拉是分不开的，我们将在第四编中加以介绍．

1717年11月16日晚上，一个宪兵巡逻在巴黎寒冷冬夜的街上，突然在圣哲勒隆(Saint Jean le Rond)教堂附近发现一个初生的婴儿弃在路旁．宪兵拾起来交给一个贫穷的玻璃匠抚养成人，取名哲勒隆，这就是后来著名的法国数学家达朗贝尔(Jean le Rond D'Alembert, 1717.11.16生于巴黎，1783.10.29卒于巴黎）．

他在微分方程，力学方面的贡献都很大．1743年出版《动力学》(Traité de dynamique)，包含后来以达朗贝尔命名的



拉格朗日(Lagrange)

力学原理．分析书里判别正项级数收敛性的“达朗贝尔法”首见于他的《数学论丛》(Opuscules Mathématiques, 1768)中．

拉格朗日(Joseph Louis Lagrange, 1736.1.25—1813.4.10)[1]，是稍后于欧拉的大数学家．祖父是法国人，祖母是意大利人，父亲一度富有，但在投机生意中惨遭破产．晚年拉格朗日回想起来，把这件事当作一生的最大幸运，否则，他或者也成为投机商人，而不献身于数学了．

拉格朗日从19岁起，和欧拉通信，探讨“等周问题”，奠定了变分法的基础．[2]

1764年法国科学院提出月球天平动(libration)问题，悬赏征答．要求用万有引力解释月球何以自转，并永远以同一面对着地球，且有二均差(variation of the moon)．拉格朗日很有把握地获取了奖金．这一举成功鼓舞科学院提出更难的木星四卫星的理论，一个比克雷罗、达朗贝尔、欧拉研究过的三

[1] 生于意大利西部的土灵(Turin)，卒于巴黎．

[2] 见本书第四编一．p.470．

体问题[1]复杂得多的六体问题[2]．拉格朗日用近似解法克服了困难，1766年再次得奖．[3]在这些问题中拉格朗日大量使用了微分方程的理论．

欧拉在1727年第一次去彼得堡，1741年应普鲁士王腓特烈大帝(Frederick the Great，1712—1786，1740 —1786在位)的邀请，到柏林担任柏林科学院物理数学所所长．1766年第二次去彼得堡，特别指定全欧洲只有拉格朗日才能继任他的所长职位，达朗贝尔也作了同样的推荐．于是腓特烈大帝写信给拉格朗日说："欧洲最大之王希望欧洲最大之数学家在他的宫廷中．"拉格朗日于是到了柏林，领导科学院物理数学部门的工作，直到1787年移居巴黎．

在柏林的20年间，完成了牛顿以后最伟大的经典力学著作《分析力学》(Mécanique Analytique，1788)．拉格朗日应用了变分原理，建立了优美而和谐的力学体系．哈密顿誉之为"科学诗的一种"，足当之而无愧．拉格朗日19岁时便开始酝酿《分析力学》的工作，出版时已52岁．这一本不朽的著作，几乎用去他一生的时间．拉格朗日的方程论丰富了代数学的内容，他在数论、连分数、微积分、微分方程、变分法等方面都写了大量的论文．

随着腓特烈大帝的死(1786)，德国对科学家的崇敬稍减，拉格朗日发觉知识界的境况并不是那么令人愉快的，于是接受

---

〔1〕这问题在天文学上很重要，拉格朗日也作了很有价值的贡献．详细历史见 Forest Ray Moulton, An Introduction to Celestial Mechanics (1914) p.319.

〔2〕加上太阳，一共是6个天体互相吸引．

〔3〕E.T.Bell, Men of Mathematics (1937) p.158.

法王路易十六（Louis XVI, 1754—1793）的邀请，定居在巴黎。那时法国度量衡米制运动方兴，拉格朗日就任米制委员会主任。

法国资产阶级大革命期间（1789开始），革命政府一度下令将所有外国人驱逐出境，但特别声明拉格朗日是这法令的例外，由此可见当时对拉格朗日的尊崇。[1]

尽管如此，拉瓦节(Antoine Laurent Lavoisier, 1743.8.26—1794.5.8，法国著名化学家）上断头台的命运使拉格朗日决心离开法国。但有一件事使他终于打消了这个念头，那就是1795年师范学院（École Normale）、1797年理工科大学(École Polytechnique)相继在巴黎建立。这两所学校对他具有很大的吸引力，后来成为法国科学的温床，培养出成群世界第一流的科学家。

拉格朗日兼任这两所学校的教授。不久，完成他晚期的两大分析巨著：《解析函数论》（Théorie des fonctions analytiques, 1797）[2]和《函数计算讲义》（Leçons sur le Calcul des fonctions, 1801）。

这是他早年有关工作的总结，《解析函数论》奠基于1772年的一篇论文。他企图抛弃自牛顿以来模糊不清的无穷小概念。在1759年11月24日给欧拉的信中深信自己巩固了微积分的基础。他先用代数方法证明了泰勒展开式，接着定义导数（微

〔1〕D.E. Smith, History of Mathematics(1923)p.484.

〔2〕现今教科书所称的“拉格朗日定理”，西方的书多称为微分中值定理。从历史上看，最先为柯西在《理工科大学无穷小计算讲义摘要》一文中所提出。但更早的拉格朗日在《解析函数论》中已引入带有“拉格朗日余项”的“泰勒公式”，可以看作中值定理更一般的形式。



拉普拉斯(Laplace)

商）是$f(x+h)$的泰勒展开式中h的系数，然后建立起全部的分析学。拉格朗日以为这样就可以克服极限理论的困难。可是无穷级数的收敛问题，仍然无法逃避极限概念。《解析函数论》在这方面没有成功，但对函数的抽象处理，却可说是实变函数论的起点。

拉普拉斯(Pierre Simon Laplace, 1749. 3. 23—1827. 3. 5)[1]是一个小农民的儿子，得邻人的资助进入学校。曾在波蒙军事学校攻读，不久任这个学校的数学教员。

18岁时，拉普拉斯从乡下带着介绍信到繁华的巴黎去见威名赫赫的达朗贝尔。荐书既投，久无回音。拉普拉斯并不灰心，即作一力学论文，求教于达朗贝尔。达朗贝尔奇其才，复了一封充满热情的信，带有这样的话："你用不着别人介绍，你自己就是很好的推荐书。"达朗贝尔介绍他去当巴黎陆军学校(École Militaire) 的数学教授。拉普拉斯一生的事业，从此开始。

拉普拉斯曾参与师范学院和理工科大学的创建工作。拿破

〔1〕生于法国西北卡尔瓦多(Calvados)的波蒙(Beaumont-en-Auge)，卒于巴黎。

仑(Napoleon Bonaparte, 1769—1821) 给他很多名位，任命他为内政部长，6个月后，认为他不能称职，罢其官. 讥讽他想将“无穷小的精神”(L'esprit des infiniment petits)带入工作中.

拉普拉斯主要的著作有《宇宙体系论》(Exposition du système du monde, 1796)；[1]《天体力学》(Traité de mécanique céleste, 1799—1825)；《分析概率论》(Théorie analytique des probabilités, 1812).

《宇宙体系论》提倡有名的太阳系生成的星云假说，[2]这假说1755年康德 (Immanuel Kant, 1724—1804) 已经述及，所以通常叫做“康德—拉普拉斯星云假说”.[3]

五大卷的杰作《天体力学》是牛顿、达朗贝尔、欧拉、拉格朗日诸大家天文工作发展的高峰. 它吸取了前人全部发明，阐述天体运行的数学理论，讨论地球形状，月离理论，三体问题及行星摄动等等.

位论是《天体力学》的一部分，这里出现了“拉普拉斯方程”：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0.$$

这方程更早见于他一篇关于土星光环的论文中 (1787，发

〔1〕有汉译本《宇宙体系论》(1978).

〔2〕汉译本p.476附录七.

〔3〕1734年瑞士的斯威登博(Emanuel Swedenborg, 1688—1772)或者已经知道。见 D.J. Struik, A Concise History of Mathematics (1954) p.194.

表于1789)．[1]

围绕着这部堂皇巨著《天体力学》，有许多故事．拿破仑想戏弄拉普拉斯，指摘他说："拉普拉斯先生，有人说你写这本宇宙体系的大书，从来没有提到宇宙的创造者（上帝）．"拉普拉斯毅然答道："陛下，我不需要这种假设（Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse)．"[2]

哈密顿16岁时发表论文订正《天体力学》证明中的一个错误，从此开始了数学生涯．格林（George Green, 1793—1841)[3] 读了《天体力学》，顿受启发，开始将数学用于电磁理论．[4]

《天体力学》和《宇宙体系论》同是天文著作，前者学理艰深，非于数学方面深具根底者难于领悟．后者则尽弃一切数学公式，深入浅出，通俗流畅，为时人所推崇．拉普拉斯不愧为兼擅文学和数理的全才．

他的概率论著作《分析概率论》(1812)[5]，不但总结了自己过去的研究，而且也总结了这一个时代整个概率论的研究．这本书包含着丰富的几何概率论，伯努利定理，和最小二乘法的讨论，并导入"拉普拉斯变换"，成为日后亥维赛（Oliver Heaviside, 1850.5.18—1925.2.3)[6] 的运算微积的线索．

---

〔1〕E.T. Whittaker, G.N.Watson, A Couise of Modern Analysis (1935) p.386.

〔2〕恩格斯《自然辩证法》译本p.310，原文本(1959)p.360.

〔3〕英国人，原是一个面包工人，艰苦自学获得成功，以发明"格林函数"著称.

〔4〕D.J. Struik, A Concise History of Mathematics (1954) p.258.

〔5〕见本书第九章第二节p.223.

〔6〕英国电磁学家，发现大气中能反射无线电波的"亥维赛层（Heaviside layer)".



勒让德(Legendre)

勒让德(Adrien Marie Legendre, 1752.9.18—1833.1.10)[1]常和拉格朗日、拉普拉斯并列为法国数学界的“三L”。他在数论(1798, 1808)、椭圆函数(1832)等方面都有重要贡献。在确定彗星轨道的论文(1805)中比高斯更早地发现了最小二乘法的原理。他的初等几何著作《几何原理》也很有名，在这里他证明了π的无理性。

傅里叶(Joseph Fourier, 1768.3.21—1830.5.16)是一个裁缝的儿子，以“出身低微”被拒绝加入炮兵。在他的申请书上批写着：“傅里叶，出身不高贵，不得加入炮兵，虽然他是第二个牛顿”。

傅里叶愤而转向数学。以后致力研究固体的热传导。1822年出版他的名著《热的分析理论》(La Théorie Analytique de la Chaleur)。这是数学理论应用于物理的典范，它开辟了近代数学的一个巨大分支——傅里叶级数。它在物理、数学、工程技术上都有广泛的应用。

[1] 生于法国南部的土鲁斯(Toulouse)，卒于巴黎。



傅里叶(Fourier)

由于理论的严整优美，傅里叶被誉为“一首数学的诗”(a mathematical poem)[1]。

第二节　分析基础的奠定

17世纪中叶微积分建立以后，分析学飞快地向前发展，18世纪达到了空前灿烂的程度。其内容的丰富，应用的广泛，简直令人眼花缭乱。它的推进是这样的迅速，使人来不及检查和巩固这一部门的理论基础，因而遭受种种非难。19世纪初年，许多迫切的问题已基本上得到解决，数学家于是转向基础的重建。

捷克的波尔察诺(Bernard Bolzano, 1781.10.5—1848.12.18）是布拉格（Prague）大学宗教哲学教授。他开始将严格的论证导入分析学中。1816年他在二项公式的证明中清楚地提出了级数收敛的概念，同时对极限、连续和变量也有较深入的理解。波尔察诺对无穷的探究，是康托尔集合论的前驱。波尔察诺的工作当时并不为人所注意，他的著作《无穷的悖论》(Paradoxien des Unendlichen) 在死后两年（1850）才发

〔1〕恩格斯《自然辩证法》译本（1971 版）p.183.



柯西 (Cauchy)

表出来。

柯西 (Augustin-Louis Cauchy, 1789.8.21—1857.5.23, 法国人)是历史上有数的大分析学家。幼年时在父亲的教导下学习。拉格朗日、拉普拉斯常和他父亲来往，曾预言柯西日后必成大器。1805年柯西入理工科大学，1816年成为那里的教授。1830年法王查理十世(charles X, 1824—1830在位)被逐，路易·腓力普 (Louis Philippe, 1830—1848在位) 称帝。柯西由于拒绝作效忠宣誓，被革去职位，出走国外。

1838年柯西返回法国，法兰西学院给他提供一个要职，但是宣誓的要求仍然成为接纳他的障碍。1848年路易·腓立普君主政体被推翻，成立法兰西第二共和国，宣誓的规定废除，柯西终于成为理工科大学的教授。1852年政变，共和国又变成帝国，恢复了宣誓仪式，唯独柯西和阿拉哥 (D.F.J. Arago, 1786.2.26—1853.10. 2，法国著名物理学家) 可以免除[1]。

柯西的贡献遍及数学（包括应用数学）的各个领域，特别在级数、微分方程、数论、复变函数、行列式和群论、天文、

〔1〕 F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p.368.



代德金(Dedekind)

光学、弹性力学等方面都留下了大量的论文。他的全集26卷，在数量上仅次于欧拉，居第二位。

1821年，在拉普拉斯和泊松的支持下，柯西出版他的《分析教程》(Cours d'analyse de l'école royale polytechnique)，以后又出版《无穷小计算讲义》(Résumé des leçons données à l'école polytechnique sur le infinitésimal, 1823)，《无穷小计算在几何中的应用》(Applications du calcul infinitésimal à la géométrie, 1826)。这几部著作具有划时代的价值。它给出分析学一系列基本概念的严格定义。柯西的极限定义至今还普遍沿用着，连续、导数、微分、积分、无穷级数的和等概念也建立在较坚实的基础上。

确切地说，现今所谓极限的柯西定义或 ε-δ 定义是半个世纪以后经过维尔斯特拉斯的加工才完成的。柯西时代实数的严格理论还未建立起来，因此极限理论也就不可能完成。

柯西在1821年提出 ε 方法（后来又改写成 δ），即所谓极限概念的"算术化"(arithmetization)，把整个极限过程用不等式来刻画，使无穷的运算化为一系列不等式的推导。后来维

尔斯特拉斯将 ε 和 δ 联系起来，完成了 ε-δ 方法[1]。

柯西以后，分析学的逻辑基础发展史上的重大事件是实数理论的建立。这主要应归功于代德金 (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831.10.6—1916.2.12)、康托尔、维尔斯特拉斯等人。

代德金生于德国布伦兹维克 (Braunschweig)，卒于同地。学于格廷根大学，是高斯最后一个学生。1854年成为该校教师，1858年—1862年在瑞士苏黎世(Zürich)工学院任教授，1863以后到布伦兹维克工学院任教授[2]。他最有名的著作是《连续性与无理数》 (Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872) 和《数的意义》 (Was sind und was sollen die Zahlen, 1888)。

几千年前的毕达哥拉斯已经发现不可通约量的存在，但无理数的严格定义却一直到19世纪末叶才建立。1872年，代德金提出用"分划" (Schnitt)[3] 来定义无理数。

而康托尔则用有理"基本序列" (Fundamentalreihe) 来定义无理数。[4] 所谓有理基本序列，是指具有下述性质的有理数序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，对于任给的正数 ε，只要 m, n 充分大就有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$。

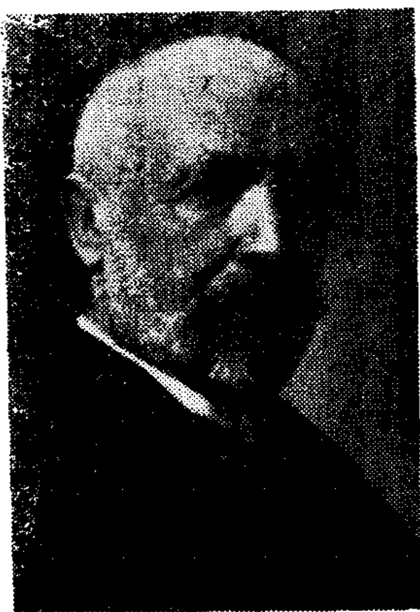
---

〔1〕 F.Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1929) p.256. E.T. Bell, The Development of Mathematics (1945) p.292. J.F. Scott, A History of Mathematics (1958) pp.199, 223.

〔2〕 传记见E.T.Bell, Men of Mathematics (1937) p.516.

〔3〕 英文 cut, 或 section, 法文 coupure, 俄文 сечение.

〔4〕 F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p.397.



康托尔 (Cantor)

康托尔 (Georg Cantor, 1845.3.3—1918.1.6) 的父母都是犹太人，父亲生于丹麦哥本哈根，是一个富有的商人，年青时移居于彼得堡，康托尔就诞生在那里。1856年，全家又搬迁到德国的法兰克福[1]，以后大部分时间在德国，所以他有时也算是德国人。

他学于苏黎世、格廷根和柏林，颇受维尔斯特拉斯的影响。康托尔后来成为哈勒 (Halle, 今属东德) 大学教授。他的无理数理论，首先发表于德国的《数学纪事》(Mathematische Annalen)[2] 中，时间也是1872年。

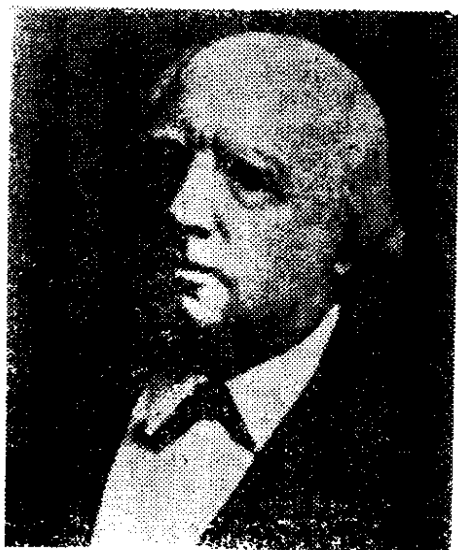
同年，海涅 (Heinrich Eduard Heine, 1821.3.15—1881.10.24) 在《克列尔杂志》[3] 上发表论文，对康托尔的理论有所推进[4]。在这篇文章中海涅提出覆盖 (covering) 定理的基本思想，1895年为波莱尔所完善，现在称为“海涅—波莱尔定理”，或“有限覆盖定理”。它和代德金的“分划”是等价

〔1〕E.T.Bell, Men of Mathematics (1937) p.558.

〔2〕vol. V, pp.123—132, (1872).

〔3〕vol.LXXIV, pp.172—188, (1872).

〔4〕E.W.Hobson (1856—1933), The Theory of Functions of a Real Variable, vol. I (1907) p.22.



维尔斯特拉斯 (Weierstrass)

的。

康托尔无理数的"基本序列"定义，实际上梅累 (Charles Méray, 1835—1911) 在1869年已经建立，1872年再次发表出来[1]。

维尔斯特拉斯 (Karl Weierstrass), 1815年10月31日生于德国西部西发里亚 (Westphalia) 的小村落奥斯坦菲 (Ostenfelde), 1897年2月19日卒于柏林。曾入波恩(Bonn)大学学商业和法律，[2]但坚持自学数学。1839年，慕古德曼 (Christof Gudermann, 1798—1852) 之名到明斯特 (Münster, 德国西部) 去专门听他的课，得到古德曼的热心教导。古德曼以研究椭圆函数及"古德曼函数" (Gudermannian)[3] 著称。

不久，维尔斯特拉斯在明斯特成为一个中学教师。以后又在达赤克朗 (Deutsch—Krone)，布伦斯堡 (Braunsberg)[4] 等小城镇任教。他除了教数学、物理之外，还教德语、作文、

---

〔1〕E.W.Hobson, The Theory of Functions of a Real Variable (1907) p.22.

〔2〕F.Cajori, A History of Mathematics (1919) pp. 423—425. E.T. Bell, Men of Mathematics (1937) chap.22.

〔3〕$\mathrm{gd}x=\mathrm{arctg}(\mathrm{sh}x)$.

〔4〕今属波兰，位于哥尼斯堡 (Königsberg, 今苏联加里宁格勒) 西南60公里。

地理，1845年以后还兼教体育.

白天有繁重的教学任务，他只好利用晚间，废寝忘食地钻研数学。某夜，维尔斯特拉斯进行一项重大问题的突破工作，竟不知道东方已晓。直到校长到寝室来查看为什么没有上八点钟的课时，他才猛然醒悟，请求校长原谅他缺了课。因为他希望不久这项重大发现将会使学术界震惊。

不久，根据维尔斯特拉斯的学术成就，哥尼斯堡大学授给他名誉博士学位。由于库麦的推荐，1856年他成为柏林大学助理教授，1864年成为正教授。维尔斯特拉斯除了自己的研究工作外，还培养了一大批数学家，为19世纪的数学发展添加了光彩。

维尔斯特拉斯是将严格的论证引入分析学的一位大师。作为一个例子，他发现处处不可微的连续函数[1]

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}\cos(b^{n}\pi x)\quad \left(0<a<1,\ ab>1+\frac{3}{2}\pi,\ b\text{是奇数}\right),$$

使数学界为之一惊，过去总以为连续函数只可能在个别点处不可微。

维尔斯特拉斯用递增有界数列来定义无理数，这在1860年柏林大学的讲义中已有记载[2]，1872年柯沙克(H.Kossak) 替他发表出来。

1892年，明斯特的巴赫门 (Paul Bachmann, 1837.6.22

〔1〕德布瓦里蒙 (Paul Du Bois Reymond, 1831—1889) 代其发表于 Journ. für Math., vol.79 (1875) pp.21—37. 见印度 A.N.Singh, The Theory and Construction of Non-differentiable Functions (1935).

〔2〕E.T. Bell, Men of Mathematics (1937) p.431.

—1920.3.31）提出“区间套（Intervallschachtelung, Nest of intervals）原理”，用来建立实数理论。这一原理相当直观易懂，后来为许多教科书所采用。

实数的三大派理论：代德金的“分划”，康托尔、海涅的“基本序列”，维尔斯特拉斯的“有界单调序列”，同一年（1872）在德国出现，这也是巧合。

有了实数理论，加上集合论和柯西、维尔斯特拉斯的极限论，数学分析就建立在巩固的逻辑基础上。结束了三百多年的混乱局面，并推动了函数论的发展。

康托尔是集合论的创始人，1875年在《流形理论》（Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre）[1]中开始发表其集合论思想。1883年正式出版其集合论著作《一般流形理论基础》（Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre）[2]，以后又发表文章多篇。集合论很快形成一个独立分支，并渗透到所有的数学领域中去。

第三节　函数论、泛函分析

函数论包括复变函数论和实变函数论。[3]

复数早在16世纪已经出现，但对复数的全面掌握和广泛运用，却迟至18世纪。如果函数的自变量是复数$z=x+iy$，那么函数$w=f(z)$叫做复变函数，也可以写成

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y) \quad (1)$$

〔1〕发表于Crelle 84, pp. 242—258。“流形”是“集合”的别名。

〔2〕或译为《一般集合论基础》。

〔3〕有时函数论也单指复变函数论而言。

的形式. 如果 $f(z)$ 在某一区域D内除了可能有有限个例外点之外，处处有导数，那么 $f(z)$ 叫做D内的解析函数；例外点叫做奇点. 复变函数论主要研究解析函数的性质。

（1）中的 $P(x, y)$，$Q(x, y)$ 是一对关于 x，y 的实函数，

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2}$$

成立，是 $f(z)$ 可微的必要条件，再加上一些条件[1]，条件就是充分的。

复变函数的研究是从18世纪开始的。三、四十年代，欧拉就已利用幂级数详细讨论过初等复变函数的性质。1777年3月，欧拉向彼得堡科学院提交一篇论文，考虑了复变函数的积分

$$\int f(z)\ dz,$$

导出了关系式（2）. 达朗贝尔在1752年关于流体力学的论文中已经得到这两个方程，[2] 比欧拉更早。（2）式有的书称为"达朗贝尔一欧拉方程"[3]，但更多地称为"柯西一黎曼条件"（$C-R$条件），因为后两人更详细地研究过。

拉普拉斯也考虑过复变函数的积分，他和欧拉、达朗贝尔的工作是复变函数论的前驱。

复变函数论的全面发展是在19世纪。柯西、黎曼、维尔斯

---

〔1〕如$P(x, y)$，$Q(x, y)$ 可微，或其偏导数连续。

〔2〕Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) p. 626.

〔3〕例如 А.И.Маркушевич 《解析函数论》黄正中等译，(1957) p. 57.

特拉斯三大家作了奠基性的工作．

1825年柯西在《论虚限定积分》(Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, 1874发表) 中讨论了定积分[1]

$$\int_{x+iy}^{X+iY} f(z)\, dz.$$

1831年实质上推出了以柯西命名的著名积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt, \qquad (3)$$

其中C是区域D的边界，而 z 是D内任一点．

柯西证明这个定理是假定 $f(z)$ 有一阶导数 $f'(z)$，而且 $f'(z)$ 连续，由此推出 $f(z)$ 所有各阶导数都存在．1900年古尔沙 (Édouard Goursat, 1858. 5.21—1936.11.25)[2]证明可以把 $f'(z)$ 连续的条件去掉，只要导数在D内及C上存在，公式 (3) 就成立．同时对于解析函数的定义也只需假定 $f'(z)$ 存在而无需假定其连续．[3]

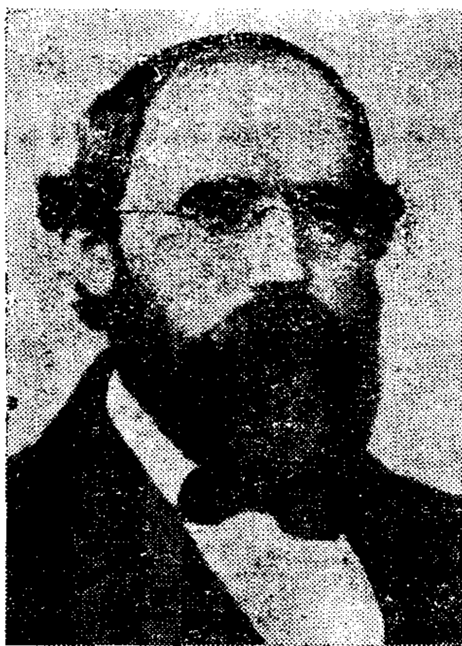
柯西在此基础上建立了一整套复变微分和积分的理论．

黎曼 (Georg Friedrich Bernhard Riemann) 1826年9月17日生于德国汉诺威(Hanover)的布列谢连兹 (Breselenz) 的小村子里，1866年7月20日卒于意大利北部马佐列湖 (Lago

〔1〕Г.М.Фихтенгольц《数学分析原理》2卷2分册，丁寿田译，(1963)，附录．《数学分析进一步发展概况》p. 463.

〔2〕E.Goursat, Sur la définition générale des fonctions analytiques, d'après Cauchy, Tr. Am. M. S. 1:14—16.

〔3〕李锐夫、程其襄《复变函数论》(1960) 附录．《复变函数论发展史略》．



黎曼 (Riemann)

Maggiore) 畔[1].

黎曼的父亲是一个牧师，他遵照父亲的愿望，入格廷根大学学哲学和神学．黎曼一到了格廷根，立刻被这数学中心的气氛所熏陶．他听了一些数学课之后，便决定放弃神学而献身于数学，成为高斯晚年的学生．

1847年黎曼到柏林见到了一些数学家如狄利克雷，雅可比(Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804.12.10—1851.2.18)，斯太纳，爱森斯坦(Ferdinand Gotthold Max Eisenstein, 1823.4.16—1852.10.11) 等，对黎曼进行数学研究，颇有影响．

1850年黎曼回到了格廷根．1851年11月以论文《复变函数论的基础》(Grundlagen für eine allegemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse) 取得了博士学位．高斯在审阅这篇论文时给予极高的评价．1854年又提出将函数表示成三角级数的重要论文．同年另一篇论文开辟了几何学的新领域．[2]

---

〔1〕传记见 E.T. Bell, Men of Mathematics (1937) pp. 484—509.

〔2〕本书第九章第三节 p.236. Felix Klein (1849—1925), Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, I (1926) p. 251.

柯西曾证明连续函数必定是可积的，黎曼则指出可积函数不一定是连续的，并给出判断积分存在的准则．黎曼的积分概念（现称“黎曼积分”）半个世纪以后，才为勒贝格所推广．

1859年黎曼成为格廷根大学教授．可惜他健康欠佳，第三次到意大利去休养时便在那里去世，年仅39岁．

黎曼1851年的论文奠定了复变函数论的基础．他推广单值解析函数到多值解析函数．引入“黎曼曲面”（Riemannsche Fläche）的重要概念，确立了复变函数的几何理论基础，他得到“黎曼一罗赫定理”，[1]对后来的发展有深远的影响．黎曼对保角映射，椭圆函数论，多周期函数以及偏微分方程，数论等方面都作出了开创性的贡献．

1859年黎曼在著名论文《在给定大小之下的素数个数》(Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse) 中将素数分布的问题归结为函数

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z},\quad z=x+iy,$$

的问题．$\zeta(z)$现称为“黎曼ζ函数”(Riemann zeta-function)．他作出这样的猜想（现称“黎曼猜想”）：$\zeta(z)$ 位于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 之间的全部零点都在 $x=\frac{1}{2}$之上，即零点 $z=x+iy$ 的实部都是$\frac{1}{2}$．[2]

这一猜想后来在希耳伯特的23个问题中被列为第8问题，

〔1〕本书第十二章第三节．p．308．

〔2〕参考华罗庚《指数和的估计及其在数论中的应用》(1963)p.42．

至今还没有人能证明．许多数论中的问题要等到这个问题的解决才能解决．黎曼研究数论广泛地使用了解析函数的工具，开创了解析数论这一新的分支，同时又促进了解析函数论的发展．[1]

维尔斯特拉斯和柯西、黎曼不同，他完全摆脱了几何直观，以幂级数为工具，定义解析函数是可以展开为幂级数的函数．围绕着奇点研究函数的性质．他在解析开拓和椭圆函数论方面也有很重要的工作．椭圆函数论是和复变函数的基础理论平行地发展起来的．早期最重要的创建者是阿贝耳和雅可比．

维尔斯特拉斯的学生柯瓦列夫斯卡娅（Софья Васильевна Ковалевская，1850.1.15—1891.2.10，俄国人）是历史上屈指可数的几个女数学家之一．[2] 她将解析函数用于微分方程，推动了微分方程解析理论的发展．[3]

近几十年来，复变函数论又有很大的推进．得力于米塔·列夫勒（Gösta Mittag-Leffler，1846.3.16—1927.7.7，维尔斯特拉斯的学生，瑞典人）、庞加莱、皮卡（Emile Picard，1856.7.24—1941.12.11）、阿达玛等人的工作．芬兰学派尼凡林那(R.Nevanlinna)关于亚纯函数的贡献，颇值得注意．

在应用方面，俄罗斯的儒可夫斯基（Николай Егорович Жуковский，1847.1.17—1921.3.17）利用复变函数理论解

〔1〕 А.И.Маркушевич《解析函数》，载《苏联大百科全书》2卷 pp.342—352，张理京译（1960）．

〔2〕 传记见 E.T.Bell, Men of Mathematics (1937) pp. 423. И.Депман《数学故事》，齐全译（1957）p. 126.

〔3〕 微分方程解析理论发展史见 В. А. Добровольский, Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений (1974).

决飞机翼的结构问题，在流体力学和航空力学方面作出了贡献，也很有名。

实变函数论的发展较晚．19世纪以来，陆续发现具有某种奇特性质的函数，如连续但处处不可微的函数，连续但不分段单调的函数，函数的有限导数并不黎曼可积，可积函数列的极限是不可积函数，充满一个正方形的连续曲线[1]等等。

这些例子似乎都出乎意料之外，它促使人们去深入思考各种函数的性质．如连续函数必可积，但具有什么样性质的不连续函数也是可积的？如果改变积分的定义，可积的条件又是什么？连续函数未必可导，那么可导的充要条件是什么？另一方面，傅里叶级数有很大的实用价值，它的性质有进一步探讨的必要。上述这些问题都成为实变函数研究的内容。[2]

积分论是实变函数论的重要组成部分．斯提捷 (Thomas Jean Stieltjes, 1856.12.29—1894.12.31，荷兰人) 首先推广了积分概念 (1894)，得到了"斯提捷积分"。

"容度" (content) 和"测度" (measure) 是线段长度概念的推广，它是为了推广积分概念而建立起来的。1893年约当(Camille Jordan, 1838.1.5—1922.1.21) 在他的《分析教程》 (Cours d'analyse) 中给出"约当容度"的概念并用于讨论积分。1898年波莱尔 (Émile Borel, 1871—1956)改进

---

〔1〕皮亚诺 (Guiseppe Peano, 1858—1932) 在《充满一个平面面积的曲线》(Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, 1890) 一文中首次提出。见 E.W.Hobson, The Theory of Functions of a Real Variable, vol. Ⅰ (1907) p. 452.

〔2〕Ф.А.Медведев, Очерки истории теории функций действительного переменного(1975).


勒贝格(Lebesgue)

了容度的概念，他称之为“测度”.

下一步决定性的进展是勒贝格的工作. 勒贝格(Henry Lebesgue, 1875. 6. 28—1941. 7. 26) 是波莱尔的学生，后来是法兰西学院 (Collège de France) 的教授. 他的论文《积分，长度，面积》(Intégrale, longueur, aire, 1902) 改进了波莱尔的测度理论，[1]建立了“勒贝格测度”、“勒贝格积分”的概念.

勒贝格可测函数类加上贝尔 (René Baire, 1874.1.21—1932.7.5) 的函数类[2]大大扩张了实变函数研究的范围.

勒贝格在《积分与原函数的研究》(Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, 1904) 中证明了有界函数黎曼可积的充要条件是不连续点构成一个零测度集. 这完全解决了黎曼可积性的问题.

积分的概念后来海令哲 (Ernst Hellinger, 1883.9.30—1950.3.28) (1907)、拉同 (Johann Radon, 1887.12.16—

[1] Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) p. 1044.

[2] 贝尔关于函数分类的论文《实变数函数》(Sur les fonctions de variables réelles)，发表于1899.

1956.5.25）（1913）、当日瓦（Arnaud Denjoy，1912）、彼龙（Oscar Perron，1914）、辛钦（Александр Яковлевич Хинчин，1894—1959.11.18）（1916）等又作了种种推广和探索.

实变函数另一个领域是函数构造论. 1885年，维尔斯特拉斯的论文《关于所谓任意单实变量函数的可解析表达性》（Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen）[1] 证明连续函数必可表示为一致收敛的多项式级数，从此大家承认连续函数必定可以解析地表达，连续函数也必定可以用多项式来逼近. 这一卓越的结果和切比雪夫的最佳逼近理论是函数构造论的开端. 近年来的研究十分活跃.

本世纪之初，出现了一个广阔的新领域——泛函分析，它是古典分析观点的推广[2]. 近几十年来，由于分析学中许多新部门的形成，从而发现在代数、几何、分析中不同领域之间的某些方面的类似. 其次，几何与集合论的结合产生了抽象空间的理论，将函数看成函数空间中的点. 再加上实变函数论以及近世代数的概念和方法的影响，就产生了泛函分析. 它综合函数论、几何和代数的观点研究无穷维向量空间上的函数、算子

---

〔1〕发表于 Sitzungsberichter der Akad. zu Berlin (1885) pp.633—639,789—805.

〔2〕参考关肇直《泛函分析讲义》(1958) pp. 1—16《历史概述》. Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972), 46.Functional Analysis. pp. 1076—1095. Nicolas Bourbaki, Éléments d'histoire des mathématiques (1960) pp. 230—245.

和极限理论。



阿达玛 (Hadamard)

19世纪末佛尔太拉(Vito Volterra, 1860. 5.3—1940.10.11, 意大利人)[1]和本世纪初阿达玛(Jacques Hadamard, 1865.12.8—1963.10.17, 法国人)的著作中已出现泛函分析的萌芽。随后希耳伯特、海令哲开创了"希耳伯特空间"的研究。

本世纪黎斯(Friedrich Riesz, 1880.1.22—1956.2.28, 匈牙利人)、冯·诺伊曼, 巴拿赫(Stefan Banach, 1892.3.30—1945.8.31, 波兰人)、克列茵(М. Г. Крейн, 苏联人)、柯尔莫戈洛夫、盖勒范德(И. М. Гельфанд, 苏联人)等人都有重要的建树。



巴拿赫 (Banach)

〔1〕E.T.Bell, The Development of Mathematics (1945) p.535.

第十二章　现代数学的某些特点

现代数学，指的是本世纪40年代以后发展起来的数学。[1] 在这里只举出一些比较明显的特点，不可能作全面的论述。这些特点简单地说是：计算机科学的形成，应用数学出现众多的新分支，纯粹数学有若干重大的突破。

纯粹数学或基础理论和应用数学从来就没有严格的界限。大体上说，纯粹数学是数学的这一部分，它暂时不考虑对其他知识领域或生产实践上的直接应用。当然这并不意味着它没有用。[2] 它象一棵树的根，在长期的生长中发挥着巨大的作用。它间接地推动有关学科的发展或者在若干年后才发现其直接应用，这在历史上是屡见不鲜的。而应用数学，可以说是纯粹数学与科学技术之间的桥梁。[3]

第一节　应用数学[4]

40年代以后，涌现出大量新的应用数学科目，内容的丰

〔1〕本书第一章第二节.pp.12—14.

〔2〕F.E白劳德《纯粹数学与其他科学有关系吗？》，林华清译，载《科学译刊》第一辑(1978)pp.9—20.

〔3〕William Prager《“应用数学展望”讨论会开幕词》，载《计算机应用与应用数学》(1974)1期pp.41—45.林家翘《谈谈应用数学的作用》，陈以鸿译，载《自然杂志》(1978)1卷2期.pp.103—106.

〔4〕彼得·拉克斯《应用数学三十年》汪非译，载《自然杂志》(1979) 2卷1期.pp.16—17.此文将二次大战作为美国应用数学发展的分水岭.关肇直《应用数学的特点和重要性》，载《自然杂志》(1979.2) 2卷2期pp.86—105.

富，应用的广泛，名目的繁多，都是史无前例的．这是现代数学一个很显著的特点．下面举一些例子．

（一）对策论(theory of games 或 game theory)[1]．



冯·诺伊曼(von Neumann)

由于经济与军事的需要，形成了对策论．对策论是关于斗争的数学，它主要是用数学方法研究在竞争（包括战争、竞技、比赛，也包括人与自然的斗争）中是否存在制胜对方的最优策略以及如何找到这些策略等问题．[2]

对策论的始祖可以说是我国战国时代的孙膑．[3] 但真正形成一门独立的学科，应以1944年冯·诺伊曼、摩根斯特恩（Oskar Morgenstern）合著的《对策论与经济行为》（Theory of Games and Economic Behavior）的奠基性工作为标志．

冯·诺伊曼（John von Neumann，1903.12.28—1957.2.8）是原籍匈牙利的美国人，在点集论、算子理论、连续群论

〔1〕又译为博弈论、游戏论、策略论．

〔2〕参考数学研究所《对策论（博弈论）讲义》（1960）．

〔3〕本书第四编五．p.497．

以及第一台电子计算机的设计与核武器的研制等方面都有重要贡献。

（二）规划论(mathematical programming)

由于物资运输的需要，产生了规划论。它主要研究计划管理工作中有关安排和估值的问题。包括线性规划、非线性规划、动态规划等分支。1939年苏联康特洛维奇（Л.В.Канторович）的《生产组织与计划中的数学方法》(Математические методы организации и планирования производства)是这方面的早期著作。[1]

西方最早的系统著作有查恩斯（A.Charnes)、库伯（W.W.Cooper)、汉特逊（A. Henderson）的《线性规划概论》(An Introduction to Linear Programming)(1953)。[2]

（三）排队论(queueing theory)

排队论，也叫随机服务系统理论或公用事业理论中的数学方法。公用事业经常出现排队的现象，如等公共汽车、等买东西、等打电话等.服务机构太多会造成浪费，太少不能满足要求。在满足要求的条件下使服务机构花费最少，这是排队论研究的目的。最早起源于爱尔朗(A.K.Erlang)对电话系统的研究。[3]

---

〔1〕有汉译本（1959）。

〔2〕有汉译本（1959）。

〔3〕A.K. Erlang《排队论在丹麦电话系统中的使用》（Use of Waiting-Line Theory in the Danish Telephone System)(1908)。

以后有波拉切克（F. Pollaczek, 1930）、 辛欣、巴姆（C. Palm, 1947）等人的工作。[1]

（四） 最优化方法（optimization method）

最优化问题大量出现在工程技术、国防科学、社会科学以及工商业贸易等部门中。怎样在给定的条件下，充分利用现有的人力物力，使得完成某一项工作最快最省或质量最好，这都是最优化问题。[2]

它的产生，以约翰（F. John）1948年的文章《以不等式作附加条件的极值问题》(Extreme problems with inequalities as subsidiary conditions)为起点。[3]

优选法（optimum seeking method，简记为 OSM）和统筹法是最优化方法的一部分，近年来在华罗庚教授的倡导下曾在国内推广。统筹法的推广从1964年开始，优选法从1970年开始，取得很大的成绩。

优选法中的0.618 法是美国的基弗（J.Kiefer）在1953年提出的。[4]统筹法原来叫做“关键路线法”（critical path method，简记作 CPM）（1956），又叫做“计划评审法”

〔1〕参考崔明奇等编译《排队论》（1961）．又徐光辉《排队论浅说》，载《数学通报》（1965.11）．

〔2〕参考厦门大学《最优化技术的内容、应用与发展趋势》，载《计算机应用与应用数学》（1977）9期．

〔3〕O.L. Mangasarian《最优化方法》，席少霖译，载《计算机应用与应用数学》（1975）1期 pp.1—10.

〔4〕J.Kiefer, Sequential minimax search for a maximum, proceedings of the American Mathematical Society(1953) 4:502—506.

(program evaluation and review technique, 简记作PERT) (1958) .[1] 后来我国统称统筹法.

(五) 运筹学 (operations research简称为opsearch或OR)

二次大战期间，英、美都发明了一些新武器如雷达等，但武器的使用却落后于武器的制造，特别在反法西斯潜艇和空战中。当时集中了许多科学家研究了这些问题，取得一定的成果，以后定名为运筹学．它包括前面提到的对策论、规划论、排队论、最优化方法，还有质量控制 (quality control) 、抽样检查 (sampling inspection) 等分支．它现在还在不断地发展，所以很难划定它的范围．

1957年，在英国牛津成立了国际运筹学会 (International Federation of Operational Research Societies, 简称IFO-RS)，会员已有好几万．[2]

我国"运筹学"的名称，是1964年才确定的．[3] "运筹"一词，出自"运筹策帷幄之中，决胜于千里之外．"[4]

---

[1] 《计划管理的新方法——关于PERT和 CPM等方法的译文集》(1966).

[2] 参考(1) Charles Goodeve 《运筹学——帮助作出决策的一个科学分支》，越民义译，载《计算机应用与应用数学》(1974.11) pp.43—46. (2) H.H. Моиceeв《运筹学在苏联的发展和展望》，载《计算机应用与应用数学》(1975.9) pp.38—43. (3) 中国科学院数学研究所运筹室编《运筹学》(1973).

[3] 《数学名词补编》(1964).

[4] 见《汉书·高帝本纪》等书．帷(wéi)幄(wò)是古代军中帐幕．运筹策是运算、筹划、制定策略等．运筹学有时也叫做管理科学 (management science)，或属于管理科学的一部分．

(六) 信息论 (Information theory)

所谓"信息"，是指对接受者来说是预先不知道的报道或情报. 利用数学方法研究信息的计量、传送、变换和储存等，就是信息论. 谢农 (Claude Elwood Shannon, 1916—) 是信息论的先驱者. 他在贝尔 (Bell) 电话研究所工作，1948 年开始提出相当完善的信息论，[1] 以后得到迅速的发展.

(七) 控制论 (cybernetics)

二次大战开始时，维纳 (Norbert Wiener, 1894.11.26—1964.3.18) [2] 和当时哈佛大学的医学家罗森勃吕特 (A. Rosenblueth) 以及生物学家、工程技术人员合作，试图把现代各学科中的通讯 (communication) 及自动控制 (automatic control) 等基本问题综合成一门新的学科，终于在 1947 年定名为控制论 (cybernetics). cybernetics 一词来自希腊文 κυβερνήτηs，原意是舵手或调速器. 研究的成果总结在维纳的《控制论 (或关于在动物和机器中控制和通讯的科学)》(Cybernetics, or control and communication in the

〔1〕C.E.Shannon, A mathematical theory of communication, Bell Syst. Techn. Jour. 27(1948). 参考(1)王寿仁《信息论的数学理论》(1957). (2)喜安善市、室贺三郎《信息论》(1962). (3) J. R. Pierce《早期信息论》，康继鼎译，载《计算机应用与应用数学》(1976.4) (4)王寿仁、夏启圣《信息论简介》，载《数学通报》(1959.11).

〔2〕美国著名数学家. 1935—1936年曾到中国，在清华大学讲学. 见魏宏森《维纳在清华》，载《自然辩证法通讯》(1980) 1 期.

animal and the machine)[1] (1948)中.

控制论对于现代计算、自动化技术、通讯以及生物、医学等方面都有很大的影响.[2]

1955年以前，苏联对于控制论(俄文音译为 кибернетика)采取全盘否定的态度. 例如罗森塔尔、尤金在《简明哲学辞典》 (Краткий философский словарь) (1954) 中说这是一种“反动的伪科学”. 汉译本根据著者的原意译 кибернетика 为“大脑机械论”.[3] 到1955年才纠正过来.[4]

此外还有系统分析 (systems analysis)、[5] 可靠性理论 (reliability theory)等新的科目出现. 所谓“系统”是指由若干部件有机地组合起来可以完成某一种功能的综合体. 例如铁路系统是由轨道、车辆、车站、通讯设备和工作人员等组成的一个具有运输功能的一个机构. 而可靠性是指一个系统在规定的条件下和预定的时间内完成规定功能的概率.

上述这些，只是40年代以后出现的应用数学新分支的一部分. 这些分支所研究的范围和互相间的关系 (是平行的、是从属的或是一部分重叠) 很难划清. 也有的因为用了很多概率统计的工具，又可以把它看作概率统计的新应用或新分支. 还有的可以归入计算机科学之中.

---

〔1〕 汉译本《控制论》 (1962).

〔2〕 参考(1) 王雨田《要加强对控制论的研究》, 载《光明日报》(1978.12.22).
(2) 童天湘《控制论的认识论问题》 (上) (中) (下), 载《光明日报》 (1978.8.11,12,15).

〔3〕 汉译本, (1955.7) p.19.

〔4〕 《苏联科学界对控制论作出新的评价》, 载《学习译丛》 (1955.11).

〔5〕 钱学森、许国志、王寿云《组织管理的技术——系统工程》, 载《文汇报》 (1978.9.27).

总之，40年代以后应用数学的分支象雨后春笋一般出现。它在解决了大量的实际问题中不断发展壮大。

第二节 计算机科学

1945年末电子计算机制造成功以后，由于它应用之广，影响之大，围绕着它很自然要形成一门庞大的科学。目前还很难给计算机科学下一个明确的定义。粗略地说，它是对计算机体系、软件和某些特殊应用进行探索性和理论研究的一门科学。[1] 计算数学可以归入计算机科学之中，但它也可以算是一门应用数学。计算机的设计与制造的大部分工作，通常算是电工或计算机工程的事。所谓软件，是指程序系统。用计算机自动解题，首先要确定计算方法，然后列出解题的步骤，根据这些步骤编成程序，计算机就按照所编的程序来解题。编程序就是"程序设计"（programing）。软件（software）这个词是1959年开始使用的，[2] 是对硬件（hardware）来说的。硬件指计算机本身以及附带的物理装置。软件是指解题的程序、程序

---

〔1〕参考（1）季峙《数学与计算机科学的关系》，载《数学的实践与认识》（1978）1号、3号.(2) Donald E. knuth《计算机科学及其与数学的关系》，陆维明等译，载《计算机应用与应用数学》（1978）1—2期.(3)唐稚松《什么是计算机科学》，载《计算机应用与应用数学》（1978）8期.(4) Garret Birkhoff《数学和计算机科学》，刘定一译，载《世界科学译丛》（1978）1辑.

〔2〕(1)S.Gill《软件工程的起源和意义》，译文见《计算机应用与应用数学》（1976）11期.(2) Anthony I. Wasserman, Peter Freeman《软件工程概念和计算机科学课程》，阎家玉译，载《计算机应用与应用数学》（1978）10号.

语言（programming language）、编制程序的方法等。作一个粗浅的比喻，如果将硬件比作钢琴，那么软件就是乐谱。

软件的研究需要使用很多的数学工具如数理逻辑、代数、数理语言学、组合理论、图论等。

目前电子计算机的应用已达数千种，还有不断增加的趋势。但只有某些特殊应用才归入计算机科学之中。例如机器翻译(machine translation)、人工智能(artificial intelligence)、机器证明、图形识别(pattern recognition)、图象处理(image processing)等。

计算机辅助证明数学定理最突出的例子是“四色问题”(four color problem, Vierfarbenproblem) 的解决。平面上或球面上的地图，相邻的国家要用不同的颜色来区别。只用三种颜色，有时是不够的。如卢森堡被德、法、比利时三国所包围，没有四种颜色是分不清的。可以证明，不论地图多么复杂，五种颜色一定够用。问题是四种颜色是否一定够用？这就是有名的四色问题。

这问题最早是1840年麦比乌斯提出的。[1]它是拓扑学，同时也是图论的问题。一百多年来，许多学者花费了巨大的精力去证明它都没有成功。然而却揭示了图论的许多性质，促进图论的发展。直到1976年，美国伊利诺（Illinois）大学的阿佩尔（K. Appel）和黑肯（W. Haken）在计算机的辅助下证明了四

[1] F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p.323. E. T. Bell. The Development of Mathematics (1945) p.458.

色定理.[1] 机器计算1200小时，即使用当时最快的计算机，也要300多小时. 这一成果使数学界大为震惊，它的意义不仅仅在于四色问题本身的解决，更重要的是开辟了人和机器合作去解决理论问题的途径.

计算机和计算机科学目前仅仅处在萌芽时期，它的发展前景是很难想象的. 回顾人类对数的认识过程，最初是自然数，接着是有理数. 一旦认识了无理数，在历史上就产生了一个飞跃. 现在计算机只能处理有理数. 若干年后，数学研究包括逻辑证明的大部分工作都可以让机器来完成，而人则腾出时间来进行更精细和更富有创造性的劳动. 那时再回过头来看今天的数学研究，正象今天用机械化、自动化程度很高的工业生产的眼光去看两千年前的手工业生产方式一样.

计算机进入了数学领域，除了它本身的广泛应用以外，还将改变整个数学的面貌，改变研究方向，[2] 也改变了评价数学成果的价值标准. 总之，计算机的出现，使人类处在一个空前巨大变革的开端.

---

〔1〕参考(1) 刘为民等《四色问题及其计算机辅助证法简介》，载《计算机应用与应用数学》1977年5月号. (2) И.М. 雅各龙《四种颜色就够了》，刘定一译，载《世界科学译丛》(1978)1辑. (3)证明的结果发表于《美国数学会通报》上. Appel, k, and Haken, W., Every planar map is four colorable, Bull. Amer.Math.Soc. 82:5(Sep.1976). (4)K.Appel, W.Haken,《四色地图问题的解决》，江嘉禾译自 Scientific American(1977)237 卷10期，载《世界科学译刊》(1979) 4期. pp.40—54.

〔2〕Garrett Birkhoff《计算机影响下的代数学发展趋向》〔Current Trends in Algebra, Amer. Math. Mon.80:7(1973)〕，刘为民等译，载《计算机应用与应用数学》1975年1月号.

第三节 基础理论（纯粹数学）

40年代以后，基础理论也有飞速的发展。出现许多突破性的工作，解决了一些带有根本性质的问题。在这过程中引入了新的概念，新的方法，推动了整个数学前进。[1] 近30年来也开辟了若干崭新的数学领域。

下面举几个例子来说明这一点。

希耳伯特1900年在巴黎国际数学家大会上发表著名的演讲，提出23个尚待解决的问题。[2] 后来叫做“希耳伯特问题”。

第1问题是“连续统假设”（Kontinuumhypothese），这是集合论中的著名问题。自然数具有“可数”的势(potency)，通常用 $\aleph_0$ [3] 来表示。实数集或全直线上的点具有连续统的势，记作 c。容易证明 $\aleph_0 < c$，$\aleph_0$ 与 c 之间是否还存在势 μ，满足 $\aleph_0 < \mu < c$ 呢？康托尔猜想没有。这就是连续统假设。

1940年，原籍奥地利的美国数学家哥德尔（Kurt Gödel, 1906—）[4] 证明了连续统假设与其他公理[5] 没有矛盾，这是第一次突破。

---

〔1〕《国外数学发展概况》，载《计算机应用与应用数学》（1974）1期。

〔2〕见本书第四编四。p.493。

〔3〕这是希伯来文的第一个字母，加下标0，读若“阿列夫零”。

〔4〕当代的数理逻辑学家。1931年以证明“不完全性定理”（incompleteness theorem，任何一个形式化的数论体系都存在不能用逻辑证明的真命题）而著称于世。

〔5〕策墨洛（Ernst Zermelo, 1871.7.27—1953.5.21）、弗朗克（Abraham A. Fraenkel, 1891—1965）的集合论公理体系。

第二次突破是美国斯坦福(Stanford)大学的科恩(Paul J. Cohen, 1934—)在1963年证明了连续统假设的独立性（即不能由其他公理推出）．[1] 从而人们可以建立不含连续统假设的集合论．特别有意义的是科恩创造一种新方法——力迫(forcing)法，可以移植到别的领域中去，推动了整个数理逻辑的发展．

指标定理(index theorem)又是一个突出的例子．在复变函数论中，每一个解析函数有和它相应的黎曼曲面，而曲面的结构，又是拓扑学研究的对象．这样，在函数论和拓扑学之间就有了深刻的联系．古典的黎曼—罗赫定理，[2] 处理了黎曼曲面的二重性（拓扑和分析的性质）．1963年，阿提亚(M. F. Atiyah)、辛哲(I.M.Singer)对这个定理作了全面的拓广，得到阿提亚—辛哲定理[3]．这结果是综合了拓扑、函数论和偏微分方程等许多不同领域的最新理论和方法取得的．它揭露了这些部门间的本质联系，对各个领域产生深刻的影响．

广义函数(generalized functions)概念的引入，也是值得注意的．1936年，苏联索伯列夫(Сергей Львович Соболев, 1908—)研究偏微分方程解的存在性问题，引入了广义函

〔1〕P.J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis, Proceedings of the National Academy of Sciences, 50(1963) pp.1143—1148.

〔2〕由黎曼开始提出，罗赫(Gustav Roch, 1839—1866)完成于1864．参考 Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,(1972) p.665.

〔3〕M.F.A. Atiyah and I.M. Singer, The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull.A.M.S., 69(1963) pp.422—433.

数的概念，[1]为广义函数论作了奠基性的工作．1945年施瓦兹（Laurent Schwartz）发展了这一理论，称广义函数为“分布”（distribution）．第一部系统的著作是他的《广义函数论》（Théorie des distributions, I—II, 1950—1951）．以后广义函数成为数学的一个独立分支（也可以看作泛函分析的一部分），它在偏微分方程论、群表示论、随机过程论、理论物理以及工程技术上有大量的应用。

此外，如拓扑学中米尔诺（John Milnor, 1931—）提出的“怪球”（exotic spheres）(1956)；关于李群(Lie groups)的希耳伯特第5问题；关于丢番图方程的可解性的希耳伯特第10问题的否定解决也都很重要．[2]

近一、二十年来，除了某些重大问题的突破以外，还可以看到一些新兴分支的出现．如非标准分析（non-standard analysis)，模糊(fuzzy)数学，突变理论(catastrophe theory）等．

回顾一下数学分析发展的漫长历程．牛顿、莱布尼兹时代，极限概念是含混不清的．无穷小量——不论是牛顿的“刹那”（moments），或莱布尼兹的微分，有时是0，有时又不是0，在逻辑上不能自圆其说．因此遭受种种非难．直到柯西、维尔斯特拉斯等人，引入严格定义，用不等式来刻画极

---

〔1〕Соболев С.Л., Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Матем. сборник, 1(43) (1936) pp.39—72.

〔2〕J.H.Ewing etc., American mathematics from 1940 to the day before yesterday, The American Mathematical Monthly 83:1 (1976)．程其襄等译《1940年以来的美国数学》，载《世界科学译丛》(1978) 第一辑．

限过程，才使分析学建立在巩固的逻辑基础上。这样，分析学的论证往往就变成一连串的不等式推导。它失去了当初使用无穷小量时的那种直观、生动、活泼、易于发现问题和解决途径的思想方法。

从1960年起，鲁宾孙(Abraham Robinson, 1918.10.6—1974.4.11)[1]运用数理逻辑的方法，使无穷小量获得了新生，把它建立在严格的理论基础之上。为了和柯西、维尔斯特拉斯等人用极限方法建立的古典分析(或标准分析，standard analysis）相区别，定名为非标准分析。系统著作有鲁宾孙《非标准分析》（Non-standard Analysis，1966年初版，1974年修订版）。开斯勒（H. Jerome Keisler）的《初等微积分》(Elementary Calculus，1976）是第一本用非标准分析观点写的教科书。[2]

现在非标准分析方法已应用到实变函数论、复变函数论、拓扑学、李群、泛函分析、数论以及物理学等科目上去。

客观世界存在着大量的确定性关系（某些量一经确定，另外一些量也就随之而确定），在数学上就用函数这个概念来描述它。于是有微积分、微分方程、函数论等专门研究函数的数学来处理和研究它。同样，客观世界也存在着大量的偶然现象，为了探讨隐藏在大量偶然现象背后的统计规律性，就有概

---

〔1〕生于德国的犹太人，1962年以后到美国。传记见 Isreal Journal of Mathematics, 25(1976)。

〔2〕参考（1）张锦文《点的可分性与非标准分析》，载《自然科学争鸣》（1977）2期。(2) 袁萌《非标准分析及其应用简介》，载《自然科学争鸣》（1977）2期。(3) 程极泰《微积分的非标准分析》，载《计算机应用与应用数学》（1977）3月号。

率论与数理统计.

在现实世界中，又有许许多多的模糊现象，它和数学的精确性之间始终存在着矛盾. 过去一直没有适当的数学工具来处理这类模糊现象. 例如，文字是记录和传达语言的书写符号，它的形状写法是有一定标准的. 但是实际上每一个人写出来的字体都不一样，有时甚至写得很草. 虽然如此，只要写得不太潦草，别人也还可以认得出来. 又如侦察人员仅仅根据一些模糊的线索，经过分析研究，有时也能破获重大的案件. 这种场合精确数学往往无能为力. 问题的实质在于数学的基本概念必须进行适当的推广，才能描绘复杂的模糊现象.

在普通的集合论中，一个元素对于一个集合来说，或者是"属于"，或者是"不属于"，二者必居其一，决不能模棱两可. 1965年查德（L. A. Zadeh）引入了与此不同的模糊集（fuzzy sets）的新概念.[1] 十几年来，在电子计算机的配合下，形成一个数学的新分支——模糊数学，很快地应用到各个领域中去. 有使整个数学形成三个组成部分——经典数学、统计数学、模糊数学——的趋势.

1968年法国的汤姆（René Thom）[2] 提出了突变理论（catastrophe theory），引起了人们的极大兴趣. 这种理论

〔1〕也译作不分明集合，或弗齐集合. 见(1)潘雪海等《弗齐集合论》，载《计算机应用与应用数学》（1976）9期. (2)汪培庄等《介绍一门新的数学——模糊数学》，载《光明日报》（1978.10.13）. (3)楼世博等《模糊数学》，载《自然杂志》（1978）1卷6期. 近来也有主张音义兼顾译成弗晰集合的.

〔2〕曾获1958年菲尔兹(Fields)奖. 菲尔兹奖是目前国际上数学的最高荣誉. 它是在加拿大数学家菲尔兹（John charles Fields, 1863—1932, 1924年在多伦多国际数学家大会上任主席）的建议下设立的，从1932年起每4年颁发一次，奖给40岁以下有卓越贡献的数学家.

试图用数学工具描述客观世界的突变现象，如桥梁崩坍，胚胎变异，神经错乱等等．如果说微积分的主要研究对象是连续变化的现象，那么突变理论就是对不连续变化的现象提供了数学模型．[1] 这种理论正在兴起，对它作出正确的评价，似乎还为时尚早．

我们企图用上述的例子，来说明现代数学的一些特点．它不是数学的全貌，甚至不是现代数学的主要部分．因为我们并没有提到近几十年来同样获得巨大进展的经典数学，如概率论数理统计、解析数论、微分几何、代数几何、微分方程、函数论、泛函分析、数理逻辑以及大量的边缘科学等等．也没有提到有很多新内容的庞大分支数值计算，[2] 它有时也划入计算机科学之中．其中样条函数(spline function)、有限元法 (finite element method)、算法复杂性(algorithms complexity) 等部门近年来都非常活跃．

另一方面，对某些新兴的数学分支的全面评价，或者在分类中地位的确定，应该在发展得比较成熟而且经过历史的考验之后．

总的来说，40年代以来，数学的三大特点——高度的抽象性、应用的广泛性、体系的严谨性更加明显地表露出来．围绕

〔1〕参考(1) I.斯图尔特《七种基本突变》，汪宁译，载《科学译刊》第一辑(1978)．(2) E.C. Zeeman《突变理论》，R.S. Zahler, H.J.Sussmann《突变理论的主张及其应用结果》，张奠宙译，载《世界科学译丛》第二辑 (1978)．(3) 张奠宙《引起争论的"突变理论"》，载《光明日报》(1978.7.14)．(4) 突变理论的原始论文见 E. C. Zeemen, Catastrophe Theory,"Selected Papers,1972—1977"(1977)．

〔2〕David M. Young《近代数值分析概况》，译文见《计算机应用与应用数学》(1975) 7期．

着计算机产生了计算机科学，应用数学涌现出种类繁多的新分支，基础理论也有许多突破性的工作和出现大量的新概念、新方法和新的部门．而各个数学领域又互相交融、互相促进，错综复杂地交织在一起，[1]并渗透到各个知识领域（不仅仅是自然科学）里去，起着越来越大的作用．值得注意的是，目前数学还有加速发展的趋势，这是过去任何一个时期所不能比拟的。[2]

---

〔1〕吴文俊《数学概况及其发展》，载《现代科学技术简介》（1978）pp.225—237.

〔2〕现代数学各分支的发展情形参考《现代数学的进展》，载《自然杂志》（1979）2卷5期，2卷6期．

第三编　中国古代数学

第十三章 《周髀算经》

第一节 《算经十书》

西汉（公元前206—公元8年）初年，废除了秦的苛政，农村秩序恢复起来，生产力一天天提高，农业工具和技术也都较前进步了。如东汉（公元25—220）时中原地区普遍使用牛耕，手工业也有新的发展。南阳（今河南省南阳县）地区使用水力鼓风机械冶铁[1]。蜀郡临邛（今四川邛崃）用火井煮盐[2]。东汉和帝末（公元105年）蔡伦改良纸的制造[3]，对推动文化和保存文化遗产都起着伟大的作用。汉武帝（公元前140—87年在位）即位后，采纳董仲舒"罢黜百家，独尊儒术"的建议，实行思想统治。西汉末年，利用旧有的阴阳五行之说，提倡谶纬之学（占卜星相，用隐语来预决吉凶之类），依托儒家，附会神话，以欺骗人民。

这样并不能压制人民研究科学的积极性。东汉初期出现了

---

〔1〕杨宽《中国古代冶铁技术的发明和发展》(1956) p.49.

〔2〕燕羽《中国人民对燃料的发现和使用》，载《中国科学技术发明和科学技术人物论集》(1955)。

〔3〕潘吉星《造纸术的发明和发展》，载《中国古代科技成就》(1978)。

一个杰出的唯物论者王充（约公元27—97年），他在所著《论衡》中有力地抨击了统治阶级欺骗人民的阴阳五行说的无稽，批判了谶纬的虚妄。

两汉的科学文化有显著的发展。数学方面，随着田亩测量和粮食运输的频繁，建筑工程和赋税征收的需要，出现了《周髀》、《九章》等总结性的著作。

汉、唐遗留下来的数学书籍不多，总共才有十部[1]，通常叫做《算经十书》（简称《十书》）。这《十书》并不能概括汉、唐数学知识的全部，但仅从这《十书》里已经可以看到我们祖国数学家的许多辉煌成就。

所谓《十书》是[2]：（1）《周髀算经》（简称《周髀》，余类推）；（2）《九章算术》；（3）《海岛算经》；（4）《孙子算经》；（5）《张邱建算经》；（6）《五曹算经》；（7）《五经算术》；（8）《缉古算经》；（9）《数术记遗》；（10）《夏侯阳算经》。

《十书》的名称和内容历代有些变动。北周（557—581）甄鸾撰注算经，有第一种到第八种和第十种，没有《缉古算经》（那时还未产生），也没有祖冲之的《缀术》，但有董泉《三等数》和《甄鸾算术》[3]。

我国科举考试制度，起源于隋朝（581—618），到唐太宗（599-649，626-649在位）才固定下来。魏、晋、南北朝（220—589）

---

〔1〕汉、唐（公元前206—公元907年）千余年间数学著作至少有几十部。《隋书·经籍志》记载了27种；《新唐书·艺文志》则为35种。

〔2〕根据钱宝琮校点《算经十书》（1963）。

〔3〕李俨《中国古代数学史料》（1963）pp. 69—71.

时选拔官吏，实行“九品中正”制度，主要看“家世”（也就是家庭出身），大官必须是世族豪门。“上品无寒门，下品无势族”。隋文帝(541—604，581—604在位）废除九品中正制，打破士族垄断，用荐举的方法选拔官吏。隋炀帝（569—618，604—618在位）看到荐举仍然无法评定高低，就改用考试的办法，“始建进士科”，[1]这就是科举制度的开始。又在国子监内设立“算学”。[2]唐太宗时扩大国子监的员生名额，明确了科举考试制度。以后各代断断续续地实行科举取士制度，一直到清光绪31年（1905）才完全废除，前后实行一千二百多年。

唐李淳风（？—714）等人注释十部算经，高宗显庆元年（656）完成，作为国子监学习和考试的用书。这十部算经和现在的《十书》不完全相同。根据各书的记载，李淳风注释的算经有：《周髀》、《九章》、《海岛》、《孙子》、《张丘建》、《五曹》、《五经》、《缉古》、《缀术》。

北宋（960—1127）时期，我国数学有一个高速度的发展，印刷术也已广泛地使用。宋神宗元丰七年（1084）重新刊刻《十书》，没有了《缀术》，那时这部重要的著作已经失传。唐代立于学官的《夏侯阳算经》也已失传，就用唐大历(766—779）年间韩延所撰的实用算术来充数。[3]

南宋（1127—1279）宁宗嘉定6年（1213）鲍澣之翻刻这几部算经。他在杭州七宝山宁寿观的藏书中找到一本徐岳《数

[1] 杜佑(735—812)《通典》（我国第一部记述典章制度的历史，完成于801年）卷14选举二。刘昫《旧唐书》（945完成）卷119《杨绾传》。

[2] 相当于国立大学的数学系。

[3] 钱宝琮点校《算经十书》(1963)，《序》及《夏侯阳算经提要》。

术记遗》，认为也是唐代数学用书之一，将它和《周髀》、《九章》等凑成十部算经一同付印，这就是今天看到的《算经十书》。

研究汉、唐的数学，主要以《十书》为根据。

第二节 《周髀》的年代

《十书》的第一部是《周髀算经》。“周髀”的名称，书中作了解释。卷上有一段荣方和陈子的问答。“荣方曰：周髀者何？陈子曰：古时天子治周，此数望之从周，故曰周髀。髀者，表也。”“髀”原义是股（大腿）或股骨，这里指的是长八尺用以测量日影的表。“周”是周代。这本书记载从周代传下来的一些方法，所以叫“周髀”。[1]

《周髀》的成书年代，没有一个大家公认的看法。最早的估计认为它是周公（姬旦，周武王之弟）时代（公元前1100年左右）的作品。[2] 理由是它记载周公时代的事。这一条理由很容

〔1〕李约瑟认为〔《中国科学技术史》译本第三卷《数学》（1978）p.41〕“周”应解释作“圆周”或“周天”。并把《周髀算经》译作“The Arithmetical Classic of the Gnomon and the Circular Paths of Heaven”（关于日晷与天的圆道的算术经典），并认为宋代李籍《周髀算经音义》具有这样的观点。李籍的原文是“周髀算经者，以九数勾股重差算日月周天行度。……传自周公，受之于大夫商高，周人志之，故曰周髀。”似乎也是将“周”字解释作“周公”，“周代”。《周髀算经音义》有的本子署名唐李籍撰，这是不对的。见李俨《中国数学大纲》（上）（1958）p.153。

〔2〕如南宋嘉定6年（1213）鲍澣之《周髀算经跋》说：“其书出于商、周之间。”又D.E.Smith, History of Mathematics, vol. I (1923) p. 30. Howard Eves, An Introduction to the History of Mathematics (1976) p.51.

易推翻．《周髀》一开头就说："昔者周公问于商高曰……．"可见写书时，周公已是古代的人物[1]．

较多的学者认为成书于公元前1世纪．理由如下：《周髀》卷下之三有："日主昼，月主夜，昼夜为一日．日月俱起建星．"和《汉书·律历志》第一上："至（汉）武帝元封7年（即太初元年，公元前104年）……日月在建星"的记载相同，所以著书的时间也大致相同[2]．此外，《周髀》所载二十四气的名称和顺序与《淮南子·天文训》相同，还根据其他的天文记载，断定《周髀》是公元前100年左右的作品．[3]

我国古代许多书，都不是出自一个人的手，也不是一个时代的产物．一般先有一个雏形，后人陆续添加新的内容，最后成为较完整的著作．《周髀》大概也是这样．根据书的内容，可以大致确定成书年代的上下限．

《周髀》卷上之三："吕氏曰：凡四海之内，东西二万八千里，南北二万六千里．"汉赵君卿（约222年）注："吕氏，秦相吕不韦（？—公元前235年）作《吕氏春秋》．"由此知道《周髀》（至少这一部分）成书在公元前235年之后．[4]

---

〔1〕陈杰《算法大成》上编(1823)中已指出来．

〔2〕李俨《中国数学发展情形》，载《数学通报》(1955.7)p.3．

〔3〕钱宝琮校点《算经十书》(1963)，《周髀算经提要》．此外还有一些说法，如：刘朝阳《中国天文学史之一重大问题——周髀算经之年代》，中山大学印《自然科学》2卷1期(1929.7)pp.21—31，认为成书在公元9至84年之间．日本能田忠亮《周髀算经の研究》（昭和8年，1933）说是东汉灵帝（168—189）时的产物．日本三上义夫《中国算学之特色》林科棠译，(1929)p.32引用饭岛忠夫之说，以为是前汉末后汉初（公元一世纪）．

〔4〕李约瑟对此有不同看法，他认为这段引文可能是汉初的编者加入的．《中国科学技术史》译本第三卷《数学》p.42．

另一方面，《周髀》卷下之二谈到八节二十四气晷（日影）的长短，“雨水”之后叫做“启蛰”．“启蛰”是“惊蛰”的旧名．《礼记》卷五《月令》第六：“孟春之月，……东风解冻，蛰虫始振．”郑玄（127—200）注：“（《大戴礼记》）《夏小正》：‘正月启蛰’．汉始亦以惊蛰为正月中．”疏：“前汉之末，刘歆作《三统历》，改惊蛰为二月节．”《汉书·律历志》第一下：“立春，中营室十四度，惊蛰终于奎四度．”前汉把“启蛰”改为“惊蛰”，是因为汉景帝（公元前188—141年，公元前157—141年在位）叫做刘启，是避讳的缘故[1]．这一点可以作为《周髀》成书（至少这一部分）在公元前157年以前的证据[2]．如果《周髀》出现稍后于刘启，必不敢用启字．再往后，惊蛰之名已通用，更没有理由再改回去．

根据上面的讨论，我们认为《周髀》的一部分（或主要部分）内容作于公元前157年以前，到公元前100年已基本上完成。

第三节　周公、商高问答

现传的《周髀算经》有汉赵爽（字君卿）注（约222），北周（557—581）甄鸾重述，唐李淳风（656）注。

全书分上下两卷，有关数学的论述载在卷上之一、之二．其余部分是天文和历法．主要的数学成就有三方面：1.勾股定

〔1〕古代人在书写或言语时避免用皇帝和尊长的名字，叫做避讳．遇到这种字，可用同义或同音字代替，如汉文帝叫刘恒，改恒山为常山．启蛰的启字并不是非用不可的字，所以改为惊．

〔2〕曾昭安《中外数学史》第一编下册．(1956)p．244

理；2.测量术；3.分数运算．下面根据《周髀》的原文作一些解释．

卷上之一：

"昔者周公问于商高曰：……古者包犧[1]立周天历度，夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？商高曰：数之法，出于圆方；圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一[2]．故[3]折矩，以为勾广三，股修四，径隅五．……故禹之所以治天下者，此数之所生也．"

周公（约公元前1100年）姓姬名旦，武王（约公元前1122—1116年在位）之弟．商高是周时的大夫．这一段话记述周公与商高的对话．周公问商高：古时包犧作天文测量和订立历法，天没有台阶可以攀登上去，地又不能用尺寸去量度，请问数是从哪里得来的呢？商高说：数是根据圆和方的道理得来的．圆从方得来，方又从矩得来．矩是根据乘、除法计算出来的．

"矩"原指包含直角的作图工具，[4]这里可以解释作直角或直角三角形．"故折矩，……"可解释为直角或直角三角形的作图法．将一线段折成三段，围成一个三边分别是3、4、5的三角形，这一定是直角三角形，对着边长是5的角是直角．也可以解释为：作一个直角三角形，如果短直角边（勾）是3，长直角边（股）是4，那么斜边（弦）就是5．

---

〔1〕即伏羲，见本书第三章第五节.p.48.

〔2〕"九九八十一"泛指当时所知道的数学计算．

〔3〕赵注："故者，申事之辞也．"承上启下之词．

〔4〕见本书第三章第四节pp.42—43.

禹[1]治洪水，必须知道地势的高下，否则便无法抉择河道。要知道地势的高下，没有测量术（哪怕是很简单的）是不可能的。因此产生了勾股测量术。[2]

司马迁《史记》卷二《夏本纪》：

“夏禹……陆行乘车，水行乘船，泥行乘橇，山行乘檋[3]。左规矩，右准绳。”

这是说禹治水时，规矩和准绳不离左右。规矩在前面已谈到[4]，准绳是测定铅垂和水平方向的器械。绳子下面系以重物，便得铅垂线。使矩的一边和铅垂线密合，另一边便是水平方向。下面“平矩以正绳”的话，就是这个意思。

古埃及人有一种定水平的木制工具，形状象字母A。绳子系在顶点处，下悬小锤，当绳子通过等腰三角形底边中点，则底边水平。禹及商高定水平的方法大概和埃及人相似，不过不是用A形的器具而是用矩。绳子系在矩的直角顶处，绳子与一边密合时，另一边自然就是水平方向。我们相信禹时已经使用了这种方法，否则，很难想象他能确定地势的高下。

禹或商高确实知道用3：4：5的办法来构成直角三角形。至于是否知道普遍的勾股定理，还没有足够的证据来加以肯定。

---

〔1〕禹是传说中古代部落联盟领袖。姓姒，名文命，也叫大禹、夏禹、戎禹。据后人记载，他领导人民疏通江河，兴修沟渠，发展农业。治水13年，三过家门而不入。治水约在公元前21世纪。

〔2〕章鸿钊《禹之治水与勾股测量术》，载《中国数学杂志》1卷1期（1951.11）p. 16.

〔3〕檋音 jú，登山用具。

〔4〕本书第三章第四节．p.43.

西方勾股定理的证明，最早见于欧几里得《几何原本》，我国最早的证明记载在《周髀算经》赵君卿注里。《周髀》“此数之所生也”后面附有“弦图”（图24），并加说明。

下面用 a、b、c 分别表勾、股、弦。赵注：

“勾（a）股（b）各自乘，并之，为弦（c）实（$a^2+b^2=c^2$）[1]，开方除之，即弦（$c=\sqrt{a^2+b^2}$）。”

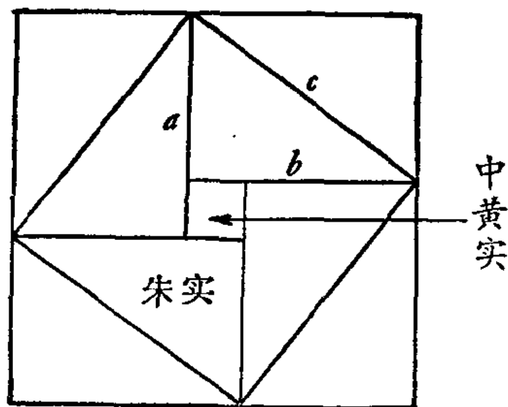


图 24

“开方除之”是开方运算的术语。上面这句话就是勾股定理：$a^2+b^2=c^2$。下面根据图形来证明。

两个全等的直角三角形（三角形涂上朱色，它的面积叫做“朱实”）合起来成为一个矩形。四个这样的矩形合成一个正方形，中间留出一个正方形的空格（涂上黄色，其面积叫做“中黄实”，也叫“差实”），这就是“弦图”。

赵君卿写道：

“按弦图，又可以勾股相乘为朱实二。[2]倍之为朱实四。以勾股之差自相乘为中黄实。[3]加差实，亦成弦实。[4]”

即 $2ab+(b-a)^2=c^2$，化简便得

$$a^2+b^2=c^2.$$

---

〔1〕古代平方数，被开方数或方程的常数项都叫做“实”。

〔2〕ab等于两个直角三角形面积。

〔3〕$(b-a)^2$ 等于中间小正方形面积。

〔4〕弦实是以弦为边的正方形面积，即 c^2。

这是多么巧妙的证明。

12世纪印度的婆什迦罗的书中也有一个类似的图，和弦图不同的地方是没有外面那个正方形，只用四个直角三角形拼成。旁边写着“请看！”而没有其他说明.[1]猜想是赵君卿的证法。赵君卿是汉时人（约222年），至少比婆什迦罗早900年！

《周髀》卷上之一的第二部分是商高说明矩的用途：

“周公曰：大哉言数！请问用矩之道。商高曰：平矩以正绳，偃[2]矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方。”

这几句话在中国数学史上有着头等的重要性。明白了它的意义，便可确定商高时代的测量技术以至整个数学的水平。

“平矩以正绳”是用矩来确定铅垂和水平方向，前面已经解释过。

“偃矩……知远”后面有赵君卿注：

“言施用无方，曲[3]从其事，术在《九章》。”

意思是矩的运用没有一定的方法，必须随机应变，用法在《九章算术》里有说明。

《九章算术》《勾股章》有若干测量问题，不外是利用勾股定理和相似三角形的关系。刘徽给《九章》作注（263）时，将这种测量术大加发挥。

赵君卿认为“偃矩”下面这几句话是指《九章》的勾股测

〔1〕F. Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p. 123.

〔2〕偃音 yǎn.

〔3〕和“曲成”的曲同义。《易·系辞》：“曲成万物而不遗。”注：“曲成者，乘变以应物，不系一方者也。”

量术．应该肯定，用矩测量要借助相似形的性质．也就是说，商高必定知道利用相似关系的测量术．就这一点而论，我国比西方第一个用同类方法去测量金字塔高的塔利斯早5个世纪！

能田忠亮《周髀算经の研究》[1]对这句话作如下的解释．

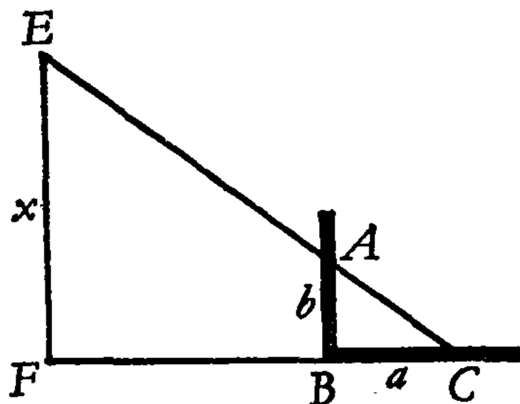


图 25

设ABC是矩，$FE=x$是要测的高或长（图25）．F在CB的延长线上．从C点望E同时见到刻度A．

$AB=b$，$BC=a$可在刻度上读出，直接度量$FC=d$，就可以按$a:b=d:x$来算出x．

这是“偃（仰）矩以望高”的情形．“覆矩以测深”的原理完全一样，只是将矩复过来（图26）．“卧矩以知远”是将矩平放着，整个图形是在水平面上，x是要测的距离．

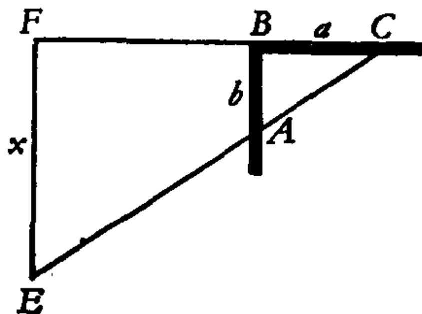


图 26

善于用矩的商高，自然是知道这些方法的．不过我们以为尚不止此．因为这种方法只有在极少数的情况下才可以施行．问题在于$FC=d$这段距离的直接度量．如果FE不是一棵树而是一座山，F点便无法到达，这时方法失效．解释“覆矩以测深”更加困难，假设FE是要

[1] 日本东方文化学院京都研究所研究报告第三册（1933）pp.17—18．

测定的山谷的深，那么F点是悬在空中的，根本不能到达。因此仅凭这样粗糙的方法，是很难测深的。

从周公的问话“夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度”的语气看来，矩的妙用应该是测定高不可攀或可望而不可即（不可接近或到达）的物体的高、深和远。

商高所谈的是天文历法，测量的对象是天和地。所以他接着说，“方属地，圆属天，天圆地方，……是故知地者智，知天者圣。夫矩之于数，其裁制万物，唯所为耳。”如果仅限于度量直接可以到达的物体的方法，要知道“天之高”和“地之广”，真是难上加难了。

那么商高用什么方法去测量“不可即”物的高、深和远呢？我们相信他是用下面要谈到的陈子测日法。

至于“环矩以为圆，合矩以为方”的解释是很简单的。固定直角三角形（矩）的斜边(弦)，直角顶点的轨迹便是圆，这是“环矩以为圆”的意思。[1] 换句话说，对直径的圆周角是直角。这定理西方的最早发现者是塔利斯，这已是几百年以后的事了。[2] “合矩以为方”就是将两个矩合起来，便构成长方形（矩形）。

第四节 荣方、陈子问答

《周髀算经》卷上之二：

---

〔1〕李俨《中国古代数学史料》(1963) p.8。

〔2〕能田忠亮《周髀算经の研究》(1933)说“环矩以为圆”是以矩的一端为心旋转，就得到圆。这种解释是很勉强的，因为它不能体现出直角（矩的精髓）的作用。其实旋转什么东西都可以得到圆，为什么特别要说环矩以为圆呢？

"昔者荣方问于陈子[1]曰：今者窃闻夫子之道，知日之高大，光之所照，一日所行，远近之数，……天地之广袤，夫子之道皆能知之．其信有之乎？陈子曰：然．"接着陈子叫荣方自己回去想一想．荣方想不出来，再去请教陈子，于是陈子告诉他测量太阳距离的方法．

"陈子曰：日中[2]立竿测影．……周髀长八尺，夏至之日，晷[3]一尺六寸．髀者，股也．正晷者，勾也．正南千里，勾一尺五寸．正北千里，勾一尺七寸．"

"髀"是一根8尺长的杆子，立在周城测日影，所以叫"周髀"．晷是日影，髀垂直立在平地上，和影子构成一个直角三角形，以髀为股，以晷为勾．夏至时，晷长一尺六寸．如果在城南千里和城北千里也同样立8尺的髀，那么夏至日城南影长一尺五寸，城北影长一尺七寸．图27中 S 是太阳，FD 是

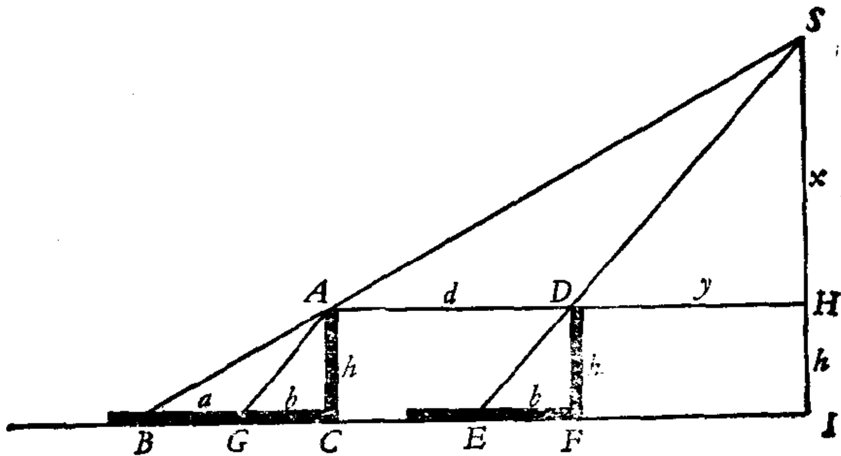


图 27

[1] 赵君卿注：荣方、陈子是周公之后人．

[2] 太阳中天时，即太阳中午经过子午线时．

[3] 晷音 guǐ，日影．

城南1000里处的髀，$FD=h=80$寸，影 $EF=b=15$寸。CA 是城北1000里处的髀，$CA=h=80$寸，影$BC=BG+GC=a+b=2+15=17$寸。其中 $AG\parallel SE$。

显然$\triangle ABC$（连同$\triangle AGC$）是与$\triangle SAH$（连同$\triangle SDH$）是相似的。于是

$$x:h=d:a$$

$$y:b=d:a$$

故
$$x=\frac{dh}{a},\qquad y=\frac{db}{a}.$$

I 是日下点（sub-solar point），$IS=x+h$，杆长 h 与 x 相比甚小，可以忽略不计，所以日地距离是 x。$AD=d=2000$里是南北两杆的距离。$DH=y$ 是南髀到日下点的距离。

x和h是常数，所以 d 与 a成正比。d是2000里，a是 2 寸，所以1000里相当于 1 寸。于是陈子得出“寸千里”的法则。

“法曰：周髀长八尺，句之损益，寸千里。”

只要将实际测出的数据代入，立刻可求出x，y的值。再用勾股定理，即知髀至太阳的距离。但陈子想出一个更加简便的方法，就是等到影长b是 6 尺的时候，$\triangle DEF$的三边正好成 3∶4∶5 的关系，$\triangle SDH$ 也成 3∶4∶5 的关系。

$$y=\frac{db}{a}=\frac{2000\text{（里）}\ 60\text{（寸）}}{2\text{（寸）}}=60000\text{（里）}.$$

直接得出 $x=80000$ 里，而杆至日的距离是100000里。

“候勾六尺。……从髀至日下六万里而髀无影。从此以上至日，则八万里。”

要算出髀至日的距离，当然也可以利用勾股定理。

“若求邪至日[1]，以日下（y）为勾，日高（x）为股，勾、股各自乘，并而开方除之，得邪至日……十万里。”

“勾股各自乘，并而开方除之”的话，是普遍勾股定理在我国的最早记载.

陈子在计算中灵活地应用了勾股定理．如

$$\sqrt{238000^2-206000^2}=119197^+.$$ [2]

本例勾股弦的数字不是3、4、5的倍数，可见陈子已十分熟练地运用了普遍的勾股定理.

陈子是什么时候的人呢？这是很重要而且有趣的问题．章鸿钊推定他是公元前6、7世纪时的人[3].

《周髀》说：“昔者荣方问于陈子，”可见陈子是《周髀》成书以前的人．又卷上之三有“日冬至在牵牛”的话．“牵牛”并不是指今俗称“牵牛”的河鼓二（天鹰座α星）而是指二十八宿中的牛宿.[4] 由此知《周髀》所记的事应是在冬至点在牛宿的时代.

牛宿不止是一颗星而是一群星，大部分在摩羯座（Capricornus），和冬至点的黄经有三十多度的差．以牛宿中的天田四（ψ Cap）为例，1875年时赤经$20^h38^m41^s$，容易算出和冬至点黄经的差约是$37°16'$．按岁差率，春分点每年在黄道上逆行

---

〔1〕髀到太阳的距离．邪同斜.

〔2〕更精确的数字是119197.3154.

〔3〕章鸿钊《周髀算经上之勾股普遍定理：“陈子定理”》，载《中国数学杂志》1卷1期（1951.11）pp.13—15.

〔4〕朱文鑫《史记天官书恒星图考》（1934）pp.54—55.

50.″26，冬至点和此星黄经相同应是公元前 795 年前后。[1]

牛宿是相当分散的，用不同的星来计算，得到不同的结果。不妨以罗堰二（υ Cap）为准，它大约位于牛宿的中部，而且正好在黄道上，1953 年赤经 $20^h37^m22^s.55$，冬至点在此处是公元前693年。我们以为定陈子是公元前 6 、7 世纪时人，是比较中肯的。最晚不会迟于公元前 4 世纪。

商高是否已知勾股的普遍定理（不限于 3 、 4 、 5 的特例），还不能肯定，但陈子一定是知道的。勾股定理至少是我国人的独立发明，这是值得我们自豪的。

陈子测日所得的结果和实际的日地距离相差很远，这并不是方法或计算有错，而是他将整个大地看作是平的。

《周髀》卷下（和卷上可能不是一个时代的作品）又说地不是平的，中央隆起，四周低下。

“极下者[2]，其地高人所居六万里，滂沱四溃而下。[3]……天象盖笠，地法覆槃。[4]”

但陈子测日却假设地是平的。否则相似关系不能成立。地平假设虽然导致测日结果的错误，然而陈子所用的方法却是一项伟大的发明。它摆脱了直接度量的羁绊，去测度可望而不可即的太阳或远方物体！

如果要测的是地面上的山高水深，可将 8 尺的髀换成矩（图27）。矩的一边（勾）水平放着，另一边（股）垂直地

---

〔1〕此星1925年赤经 $20^h41^m40^s$，1953年为 $20^h43^m19^s$，按这两个数据计算，和前面所得结果仅有两三年的误差。星的坐标见陈遵妫《恒星图表》。

〔2〕极下点，古人认为是地的中央。

〔3〕雨水向四周流下去。

〔4〕天好象一顶笠帽盖在上面，地好象覆着的盘。

面．眼睛靠着勾的某点向上望见目的物，看准与垂直的股那一个刻度对齐，便知 b，h．后退距离 d，再测望一次，又求得 a，于是 x，y 便可用简单比例算出．这是多么巧妙而简便的办法！后来刘徽（263年）推广了陈子测日术，创造一整套测量方法，依据的也就是这一原理．

立髀测日并不是到陈子才有的．《周礼》卷十《地官·大司徒》有这样的记载："正日景（影）以求地中，日南则景短，多暑；日北则景长，多寒．……日至之景尺有五寸，谓之地中．"汉郑玄（127—200）注："景尺有五寸者，南戴日下万五千里．"又："凡日景于地，千里而差一寸．"测"地中"是周公的事，也就是商高的事．唐贾公彦疏："周公摄政四年，欲求土中，而营王城，故以土圭度日影之法．……"

如果这些记载可靠的话，可以认为商高时代已经知道"寸千里"的测日法．否则，周公是无法求所谓"地中"的．

由此，我们得出"偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远"的比较合理的解释．前面所说的测日法是"偃（仰）矩以望高"，如果欲测之点低于观测者，如山谷水深之类，只要把矩覆过来测望两次，就可以解决问题．同理若要测远，可将矩平放在地面上测两次，便无需走到目的物那里去．这是后两句的解释．

再看看西方，"测量之祖"塔利斯在公元前600年左右利用日影测金字塔高，使埃及王大为惊奇．[1]其实也不外是根据简单相似三角形的原理．塔利斯可以走到金字塔旁边，但陈子或商高绝不能爬到太阳上去．就这一点来说，已经比塔利斯高

---

〔1〕本书第五章第二节 p.96．

明得多。在时间上，塔利斯和陈子大约同时，但晚于商高好几个世纪。塔利斯测金字塔究竟用什么方法，没有确实的记载。但陈子测日的方法和数据都有详细的记录。因此在可靠性方面也是远远超过前者的。何况塔利斯所量的只是小小的金字塔，而商高、陈子探讨的对象是广大无垠的天地呢！

希腊人也测量过太阳距离。最早考虑这个问题的是爱奥尼亚学派的安那西曼德，他创用日晷来测时间和天象。他认为日地距离与月地距离的比是3∶2。柏拉图学派的攸多克萨斯则认为是9∶1。这些只是十分粗略的估计。[1]

撒摩斯（Samos，土耳其西岸小岛）地方的阿利斯塔卡（Aristarchus，'Αρίσταρχος，约公元前310—230年，也译作亚里大各）进一步研究这一问题。他首创地球绕太阳的学说，是哥白尼（N.Copernicus，1473—1543）的先导。阿利斯塔卡测日的方法是当月亮上弦或下弦的时候（这时月面一半明一半暗），日（S）、地（E）、月（M）三者构成一个直角三角形$\triangle SME$（图28）。$\angle SME$是直角。只要确定日和月的

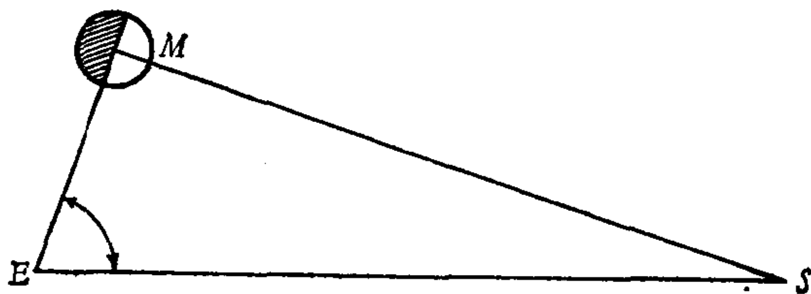


图 28

〔1〕Thomas Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I (1921) p.8.

角距 $\angle SEM$，便不难推得二者到地球距离的比。阿利斯塔卡所用的数值是$\angle SEM = 87°$（一个直角减去直角的 1/30），由此算出日地距与月地距的比在 18∶1 与20∶1之间[1]。这方法的原理很简单，只是很难测得精确的数值。所得的结果和实际的390∶1相差很远，而且仅仅是两者的比。

陈子的方法更进一步，求出确实的数字，而且在时间上早于阿利斯塔卡 3、4 个世纪。

厄拉托塞也注意到纬度不同的地方在夏至中午时日影长短不同。他胜于陈子的地方是知道地球是圆的。但他比陈子晚了好几百年。

16世纪欧洲流行一种“鼓面（drumhead）测量术”，原理和陈子测日法完全一样。想测远方物体的高，先将圆柱形的皮鼓横放在地上，鼓面垂直地面，并和欲测物体在一平面上（图29）。沿着鼓面观望物体最高点A，将视线 DE划在鼓面上。其次将鼓向前移动一段距离，再同样划一条视线 DG。于是根

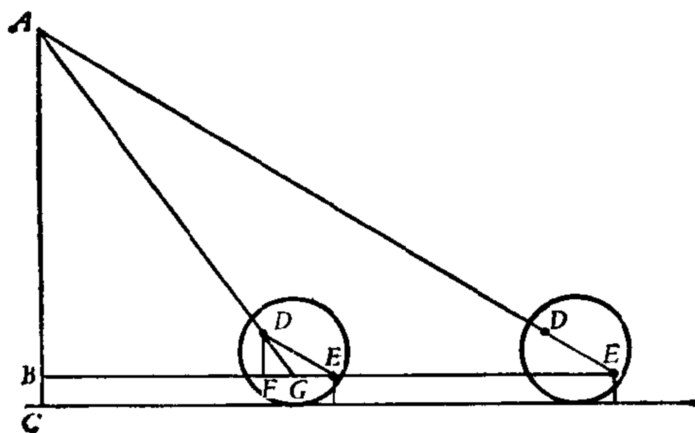


图 29

〔1〕Gérard de Vaucouleurs《天文学简史》李晓舫译，(1959)p.10。

据相似三角形的关系便算出物体的高。[1]

直到今天，陈子测日法（后来叫做“重差术”，重是重复，差是日影长短的差）仍然在使用着。称陈子为世界测量学之祖，毫不为过。

第五节 分数运算

《周髀》中有很复杂的分数算法。例如“内一衡径二十三万八千里，周七十一万四千里。分为三百六十五度四分度之一。度得一千九百五十四里二百四十七步千四百六十一分步之九百三十三。”

“内一衡”是一个直径为 238000 里的圆周，那么周长就是$238000 \times 3 = 714000$(里)。[2] 整个圆周分为$365\frac{1}{4}$度。[3] 每一度的弧长是

$$714000 \div 365\frac{1}{4} = 714000 \div \frac{1461}{4}$$

$$= 714000 \times \frac{4}{1461} = 2856000 \div 1461$$

$$= 1954\frac{1206}{1461} \text{（里）}$$

1 里 = 300步，再将分数化为步。

---

〔1〕 D.E.Smith, History of Mathematics, vol. Ⅱ (1925) p. 346.

〔2〕 《周髀》使用非常粗的圆周率$\pi = 3$。

〔3〕 《周髀》定一年为$365\frac{1}{4}$日（“一岁三百六十五日四分日之一”），分周天为$365\frac{1}{4}$度，则太阳每日行一度。

$$\frac{1206}{1461} \times 300 = 247\frac{933}{1461}\ (\text{步})\ .$$

由此可知《周髀》时代已熟练地掌握分数的运算方法，但遗憾的是没有进行约分，使得算草很繁。

第十四章　《九章算术》《海岛算经》

第一节　引　　言

《九章算术》是《算经十书》中内容最丰富和最重要的一部，它几乎集中了过去和当时的全部数学知识，将246个问题分为九章，所以叫做《九章算术》．这书不是出自某一个人的手笔，也不是一个年代的作品．它是经过历代各家的修订和增补，才逐渐成为定本的．

《九章》虽然不能确定是从什么时候开始编写，到什么时候才完成的，但经过张苍（约公元前200年）和耿寿昌（约公元前50年）的整理，大体已成定本．也许个别地方还有一些增补．

刘徽《九章算术注原序》里说："按周公制礼而有九数，九数之流，则九章是矣．往者暴秦焚书，经术散坏．自时厥后，汉北平侯张苍，大司农中丞耿寿昌皆以善算命世（闻名于世）．苍等因旧文之遗残，各称删补．故校其目，则与古或异，而所论者多近语也．"由此可以看到一些线索．虽然不能因此就上溯到周公，但在秦焚书（公元前213年）之前，至少已有原始的本子．秦末算术书可能也受到打击．西汉初年张苍和

耿寿昌把残旧的本子大加润色整理，主要内容渐次成型．最后刘徽作注，就是流传下来的本子．如果在张苍、耿寿昌之后还有重大的更改，刘徽的序里必会提到．[1]

张苍（公元前250？—152年）是阳武[2]地方的人．稍后于希腊的阿基米德，约生于战国末年，秦时为御史，主柱下方书．[3]刘邦当了皇帝，以张苍为常山（在今河北省元氏县西北）守．以后历任高官显爵．汉高祖六年（公元前201年）因有功劳，封为北平侯[4]．汉文帝四年（公元前176年）起，当了十五年丞相，活了一百多岁．张苍读书很多，深通律历．他在秦始皇焚书之后，删补增订《九章算术》．

耿寿昌是汉宣帝（公元前73—49年）时的大司农中丞（掌管钱谷粮食的官），善于计算，精天文，是当时著名的数学、天文学家．

---

〔1〕关于《九章》的成书年代，各家的意见不一．（1）李约瑟《中国科学技术史》译本第三卷(1978) p.57，认为是秦和西汉的著作加上东汉的增补．（2）А.П. Юшкевич《中国学者在数学领域中的成就》，赵孟养译，载《数学进展》2卷2期(1956) p.256，认为由张苍、耿寿昌加工完成．(3) 李俨《中国数学发展情形》，载《数学通报》(1955.7) p.3，主张是公元前100年前后，和《周髀》同时．(4) 三上义夫《中国算学的特色》，林科棠译(1929) p.21，主张它的"前身至少在前汉时代已有"．(5)钱宝琮《中国数学史》(1964) p.33，说大约在公元50—100年之间．(6)曾昭安《中外数学史》第一编下(1956) p.246，说"约在公元50年顷"．(7)李迪《中国古代数学家对面积的研究》，载《数学通报》(1956.7) p.23，说是"公元纪元前后"．(8) 钱伟长《我国历史上的科学发明》(1954) p.20，说"大约在公元四、五十年间．"

〔2〕今河南阳武县东南28里．

〔3〕是管理图籍文书的官．因侍立在殿柱下面，所以叫做柱下史． 见司马迁《史记》卷九十六《张丞相列传》第三十六．

〔4〕北平在今河北保定西满城县之北．

《九章算术》经过张苍、耿寿昌的加工，大体已成为比较完整的著作，有的部分如勾股章也可能是后来添加上去的。

到了三国魏陈留王景元四年（公元263年）刘徽作《九章算术注》[1]，加上自己的心得，使它便于了解，因而流传下来。到了唐代，李淳风又重新把它注释一番（656年）。刘徽是我国数学史上非常重要的数学家，可惜关于他的生平，没有可靠的记载。

九章的目录是：第一方田；第二粟米；第三衰分；第四少广；第五商功；第六均输；第七盈不足；第八方程；第九勾股。

第二节 《方田》

《九章》的第一章是方田．是讲平面图形的面积计算的．因为面积不全是整数，所以还连带讲到分数的算法．

古时各种图形都叫做“田”，如“方田”（正方形）、“直田”（矩形）、“圭田”（三角形）、“邪田或箕田”（梯形）、“圆田”（圆）、“弧田”（弓形）、“环田”（圆环）等．这充分说明几何学是直接从测量田亩的实践中产生的，不独埃及如此，中国也是如此．

我国古算书的特点之一，是通过一个具体问题去说明某一种法则．这并不失去算法的普遍性，因为后面的术文往往不限

[1] 《隋书》卷十六《律历志》第十一："魏陈留王景元四年（263年）刘徽注《九章》云：王莽时刘歆斛尺，……”由此知刘徽注《九章》在263年前后。

于本题所设的数字，而是这一类问题的一般解法．读者可按这种“术”去解性质相同的题．这和符号代数的公式相仿．

例如第25题指出计算三角形面积的方法．“术曰：半广以乘正从”．[1]意思是底长之半乘高便得三角形的面积．后面刘徽的注里说明其中道理，相当于证明：“半广者以盈补虚，为直田也”．意思是取底的一半，可以将三角形割补成一个矩形（图30）．这“术”已给出了计算三角形的普遍法则．

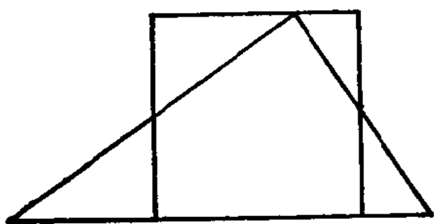


图 30

又如邪田（梯形）的面积算法是“并两邪而半之（上底加下底之和的一半）以乘正从（高）．”

在《方田》章里还给出一整套分数的算法．[2]

对我们特别有兴趣的是圆田（圆）的算法．术文下面刘徽的注是“徽率”（$\pi=3.14$）的出处，也是近年来数学史家辩论最热烈的焦点之一．

31题：“今有圆田，周三十步，径十步．问为田几何？答曰：七十五步．”

32题：“又有圆田，周一百八十一步，径六十步三分步之一，问为田几何？答曰：十一亩九十步十二分步之一．”[3]

两个题都是给定直径与圆周，求圆面积．使用“径一周

〔1〕广是底长，正从是高．

〔2〕见本书第四章第五节，pp.83—85．

〔3〕一亩等于240平方步．

三”（$\pi=3$）的粗略圆周率。所以周是30步，直径就是 10 步；周是 181 步，径就是$60\frac{1}{3}$步，误差很大。其实只要给出直径或周长，就可以确定面积。计算面积的公式是：

“术曰：半周半径相乘得积步。”

“积步”就是以平方步为单位的面积。即圆面积＝半周×半径$=\frac{2\pi r}{2}\cdot r=\pi r^2$。这公式是完全正确的。

刘徽深知“圆径一而周三”的说法不正确，合于径一周三的是圆内接正六边形的周长而不是圆周长。他在注里说：“假令圆径二尺，圆中容六觚之一面，与圆径之半其数均等。合径率一而外周率三也。”

“觚”音 gū，是古时的盛酒器，口是多边形（通常是八边），这里“觚”作正多边形解。“一面”就是一边。“圆中容六觚之一面”是圆内接正六边形的一边，和半径相等，正合径一而周三之率，刘徽又说：

“然世传此法，[1]莫肯精核，[2]学者踵古，习其谬失。”

因此有求更精确的圆周率的必要。于是刘徽创“割圆术”。设圆半径为 1 尺，从圆内接正六边形开始，每次把边数加倍，屡次用勾股定理，求出正12边形、24边形、……每边的长。边数越多，多边形越与圆周接近。刘徽说：

“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣”。

意思是：割得越细，正多边形与圆周的差也越少。最后与

〔1〕指径一周三之法。

〔2〕不肯仔细考核。

圆周重合，便没有误差了．这种说法和希腊安提丰提出的“穷竭法”不谋而合．

严格地说，无论分割得怎样细，正多边形是永远不能和圆周重合的．圆周仅是圆内接正多边形当边数无限增多时周长的极限，但圆周却不与任一个内接正多边形的周长相等，在一两千年前，当然不可能对极限有完整的认识．无论如何，刘徽是我国第一个用极限思想（虽然是比较粗糙的）来考虑问题的人，其功绩是不可抹煞的．[1]

令S，S_n，S_{2n}分别表示圆、圆内接正n边形、正$2n$边形的面积．刘徽建立了公式

$$S_{2n}<S<S_n+2(S_{2n}-S_n) \tag{1}$$

或 $S_{2n}<S<2S_{2n}-S_n$．

用图形来说明，很容易明白（图31）．设AC是圆内接正n边形的一边（用a_n表示），AB和BC是圆内接正$2n$边形的一边（a_{2n}），则

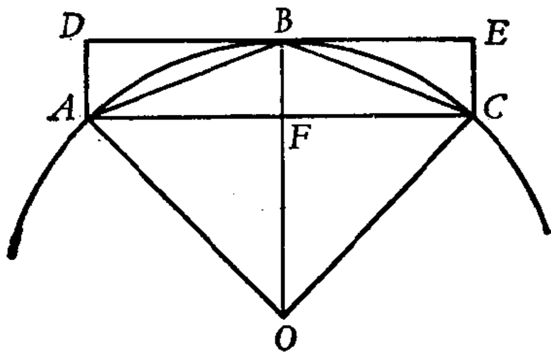


图 31

$$\triangle AOC=\frac{S_n}{n},$$

四边形$AOCB$面积$=\dfrac{S_{2n}}{n}$，$\triangle ABC=\dfrac{S_{2n}-S_n}{n}$，

[1] 杜石然《古代算学家的极限观念》，载《数学通报》(1954.2) p.1．刘徽的极限思想还见于《少广》章开方术的注中，以及《商功》章棱锥体积计算的注中．

$$2\triangle ABC=\square ACED=\frac{2(S_{2n}-S_n)}{n},$$

$$\triangle AOC+\square ACED=\frac{S_n}{n}+\frac{2(S_{2n}-S_n)}{n}>\frac{S}{n},$$

故 $S<S_n+2(S_{2n}-S_n)=2S_{2n}-S_n$。

又 $S_{2n}=\frac{1}{2}na_nr$, [1]

r 是半径。

刘徽令 $r=1$ 尺，用勾股定理算出 $a_{48}=0.130806$(尺) [2] 于是立刻得到 S_{96}。

"得幂[3]三百一十三寸六百二十五分寸之五百八十四，即九十六觚之幂也。"

即 $S_{96}=\frac{1}{2}\cdot 48a_{48}r=3.139344$ (尺^2)

$$=313.9344\ (\text{寸}^2)=313\frac{584}{625}\ (\text{寸}^2).$$

同理算出 $a_{96}=0.065438$ (尺)

$$S_{192}=314.1024\ (\text{寸}^2)=314\frac{64}{625}\ (\text{寸}^2).$$

刘徽于是得到

$$S_{192}=314\frac{64}{625}<S<S_{96}+2(S_{192}-S_{96})=314\frac{169}{625}.$$

这是公式（1）当$n=96$ 时的情形。

---

〔1〕 $\triangle OBC=\frac{1}{2}OB\cdot FC=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{1}{2}a_n$，四边形$OABC=\frac{1}{2}a_nr$.

〔2〕 精确的数值是 0.13080625845…。

〔3〕 幂：面积。

刘徽就用这样的办法确定圆面积的上、下界．这比阿基米德的方法简捷．后者要另外算出圆外切正多边形的面积来作上界．[1]

为了计算的方便，刘徽“弃其余分”（弃去分数部分），得 $S=314$（寸^2）．如以尺为单位，则

$$S=\pi r^2=\pi=3.14=\frac{157}{50}.$$

刘徽就用3.14或$\frac{157}{50}$作圆周率．后人纪念刘徽，称这个数值为“徽术”或“徽率”．

在这后面还有一大段注文：

“晋武库中，汉时王莽作铜斛，其铭曰：……，重其验耳．”

说明圆周率还可以进一步推得更精密的值$\frac{3927}{1250}=3.1416$．

原文是：

“径得一千二百五十，周得三千九百二十七，即其相与之率．若此者，盖尽其纤微矣．”

清代李潢（？—1811）《九章算术细草图说》怀疑这一段注文是祖冲之（429—500）的话，而不是刘徽原注所有．从而得出结论：$\pi=3.1416$ 不是刘徽的创作，而是祖冲之的发明．

---

〔1〕阿基米德实际算的是周长而不是面积．

这在后来引起很大的争论，成为一个悬案．[1]

刘徽是否确实求出3.1416，暂时不去分析．我们认为更重要的是他在方法论上的成就．他第一次提供了求圆周率的科学方法——割圆术，首创之功，不可泯灭！

按照他的方法，继续算到圆内接1536边形，便得

$S_{3072}=3.14159046\cdots$．　又按公式（1），$S_{3072}<S<S_{1536}+2(S_{3072}-S_{1536})$，

即 $3.14159046<\pi<3.14159704$．四舍五入，可取 $\pi=3.1416$．

---

〔1〕主张$\pi=3927/1250=3.1416$是刘徽求得的有：(1)钱宝琮《圆周率3927/1250的作者究竟是谁？它是怎样得来的？》，载《数学通报》(1955.5) pp.4—5；又钱宝琮《中国数学史》(1964) p.68．(2)三上义夫《中国算学之特色》林科棠译(1929)p.35．(3)华罗庚《旧珍宝，新光芒》，载《教师月报》2期(1951.4) p.23．(4) 钱伟长《我国历史上的科学发明》(1953)p.22．(5) 寿望斗《在数学教学中怎样进行政治思想教育(续)》，载《数学通报》(1955.11)p.5.(6)励乃骥《九章算经圆田题和刘徽注的今释》，载《数学教学》(1957.6) pp.1—11．

主张$\pi=3.1416$是祖冲之最先求得的有(1) 李俨《中国数学大纲》(上)(1958)pp.64—69．(2) 程纶《圆周率在中国的发展》，载《武汉数学通讯》3卷4期(1951.10) p.4．(3) 许莼舫《中算家的几何学研究》(1953) p.49．(4)余宁生《祖国数学家在圆周率上的伟大贡献》，载《现代数学概观》(R. Courant and H. Robbins, What is Mathematics) 章春木等译，(1953)附录四.(5)孙炽甫《中国古代数学家关于圆周率研究的成就》，载《数学通报》(1955.5)pp.5—12．(6)李迪《$\pi\doteqdot\frac{3927}{1250}$的作者和祖冲之的圆周率算法》，载《数学通报》(1955.11) pp.20—22．(7) 萧而广《关于圆周率$\frac{3927}{1250}$作者问题的一点意见》，载东北人民大学《自然科学学报》1期(1955)pp.365—366．

还有的认为是刘歆(?—23)所作．(1) 茅以升《中国圆周率略史》，载《科学》3卷4期(1917.4)pp.411—423．(2) 赵缭《数学辞典》(1943)p.723．

刘徽既然创设了计算的方法，他就有能力也有可能算出这个值。和发明这种方法对比，这只是举手之劳而已。

外国关于3.1416的记载，最早是印度的阿利耶毗陀，[1] 他比祖冲之晚半个世纪，比刘徽晚二百多年。

《九章算术》《方田》章除了给出相当完备的平面几何图形面积的计算法则外，还讲到弓形（“弧田”）面积的算法。设已知弓形的底（“弦”）$AB=b$，高（“矢”）$CD=h$，则弓形面积是

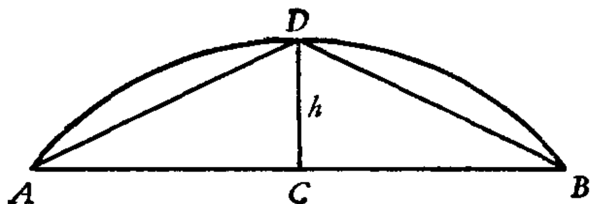


图 32

$$A=\frac{1}{2}(bh+h^2).$$

原文是：“术曰：以弦乘矢（bh），矢又自乘（h^2），并之二而一（加起来被2除）。”公式的来源原书没有说明。试作如下的推测（图32）：

$\frac{1}{2}bh$ 是 $\triangle ABD$的面积，再加上两个小弓形，就拼成所求的弓形 ADB。根据实测或估计，这两个小弓形大约等于以 h 为边的正方形面积之半，从而得出上面的公式。

这是一个相当粗略的近似公式，所得结果恒为不足近似值，误差很大。例如当$b/h=4$时，相对误差超过 10%，$b/h=$

---

[1] E.W. Hobson, Squaring the Circle, (1913) p. 22.
D. E. Smith, History of Mathematics, vol. I (1923) p. 156.
又见本书第七章第二节 p. 180.

10时超过18%，b/h 越大，误差也越大。[1] 刘徽也看出这个公式不甚理想。他在注里说，如果弓形是半圆，又取$\pi=3$，公式是对的，但结果比真值小。“若不满半圆者，益复疏阔（误差就更加大了）.”他指出可用类似“割圆术”的方法来修正公式。“割之又割，使至极细。但举弦矢相乘之数，则必近密率矣.”刘徽在这里又一次显露了极限的思想。[2]

尽管如此，后世的学者竟一直没有提出更好的公式来。朱世杰《四元玉鉴》（1303）算是例外，他在卷下之四《杂范类会》第11、12题中提出另一个近似公式。[3] 这公式误差也相当大，朱世杰又没有说明来源．故后人仍然采用《九章》公式。直到清代李锐的《弧矢算术细草》仍然墨守《九章》的成规。

《九章》公式以讹传讹，竟流传了一两千年之久。这也许是不重视理论证明的结果。如果要指出我国古代数学的弱点的话，恐怕就在这些地方。

---

〔1〕弓形面积的精确公式是：

$$A=\left(\frac{b^2+4h^2}{8h}\right)^2\arcsin\frac{4bh}{b^2+4h^2}-\frac{b^3-4bh^2}{16h}.$$

各种近似公式的比较和误差讨论见梁宗巨《用底和高表弓形面积的近似公式》，载《数学通讯》（1953.11）pp.1—8.此文建议用近似公式

$$A=\frac{2}{3}bh+\frac{16h^3}{31b},$$

$b/h\geqslant4$ 时，相对误差$<0.05\%$，$b/h\to\infty$，误差$\to0$.

〔2〕李迪《中国古代数学家对面积的研究》，载《数学通报》（1956.7）pp.23—25.

〔3〕许莼舫《中算家的几何学研究》（1953）p.39．这个公式是

$$A=\frac{1}{2}\left[bh+h^2+(\pi-3)\left(\frac{b}{2}\right)^2\right].$$

第三节 《粟米》、《衰分》、《均输》

《九章》第二章《粟米》，主要讲粮食交换的计算．先规定好各种粮食之间的交换率，然后用"今有术"来计算．"今有术"就是比例，是从"所有率"、"所求率"、"所有数"去求"所求数"的算法．用式子表示是

所有率（a）：所求率（b）＝所有数（c）：所求数（x）

$$x=\frac{bc}{a}.$$

"今有术"的名称一直沿用到清代，后来才改称"比例"．清吴嘉善述、丁取忠校《白芙堂算学丛书》（1897）解释"今有术"说："所有率（a）、所求率（b）者，举以为例之两数也．……惟此两率者，为例已定，故今所设之数可比照以求，所以亦名比例式也．""比例"一词，就这样引起．

今有术是从三个已知数求出第四个数的算法，7世纪时在印度为婆罗摩及多所知．在欧洲叫做"三数法则"（rule of three，或"三率法"）也叫"黄金法则"（golden rule），表明它贵比黄金．意大利的斐波那契在《算盘书》中作了详细的介绍．另一方面，比与比例的思想早在毕达哥拉斯时代已有，到欧几里得《几何原本》又作了系统的阐述．可是把比例和三数法则联系起来，却迟至15世纪的末叶．[1]

《衰分》是第三章．衰（音 cuī）是依照一定的标准递减．这一章讲配分比例和等差、等比数列等问题．

---

〔1〕V. Sanford, A History of Mathematics (1930) p. 163.

《均输》是第六章，处理粮食运输，均匀负担等问题。所用的方法有配分比例，复比例，等差数列等。

第四节 《少广》、《商功》

第四章《少广》，讲从田亩（平面图形）的面积，或球的体积，求出边长或径长的算法。在这里我们看到了世界上最早的多位数开平方、开立方法则的记载。[1]

古代巴比伦人是借助平方表和立方表来开方的。亚历山大的西翁注释托勒密的《天文集》时，给出几个开平方的例子，才有开平方法的说明。他的方法是用几何图形来解释的。至于开立方的法则，从来没有在希腊的著作中发现过。也许他们遇到开立方的情形很少，而一张立方表就足以解决。不过海伦是懂得用分数来表示立方根近似值的方法的。他给出$\sqrt[3]{100}=\frac{65}{14}$。[2] 在印度到公元500年左右才有阿利耶毗陀给出开平方的法则。可见我国在开方术方面是比较先进的。

在非平方数的场合，刘徽注里提到[3]

"不加借算"：$\sqrt{a^2+r}=a+\frac{r}{2a}$

[1] А.П. Юшкевич《中国学者在数学领域中的成就》，赵孟养译，载《数学进展》2卷2期，(1956.5) p.261. 又钱宝琮《中国数学史》(1964) pp.46—51.

[2] T.Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I (1921) p.63.

[3] 李俨《中算史论丛》(一) (1954) p.98《中算家的平方零约术》.

"加借算"：$\sqrt{a^2+r}=a+\dfrac{r}{2a+1}$.

并指出平方根的值在这两个近似值之间。

开方开不尽，可以继续开下去，用十进分数（小数）表示其近似值。[1]

除了整数的开方外，还有分数的开方。如第22题：

"又有积一百九十三万七千五百四十一尺二十七分尺之一十七，问为立方几何？答曰：一百二十四尺太半尺。"[2]

即
$$\sqrt[3]{1937541\frac{17}{27}}=124\frac{2}{3}.$$

除了开平方、立方术外，还有"开圆术"、"开立圆术"。"开圆"是从圆面积求圆周的方法。设已知圆面积A，圆周长应为 $l=2\pi r=\sqrt{4\pi A}$。《九章》原文用$\pi=3$，故$l=\sqrt{12A}$.

"开立圆"是从"立圆"（球）体积，求直径的方法。用的公式是

$$d=\sqrt[3]{\frac{16V}{9}}\qquad (d\text{是直径，}V\text{是体积}).$$

这公式误差很大。[3]正确的应该是

$$d=\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}.$$

---

〔1〕原文是："求其微数。微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细，……"见第16题开方术的注。参考钱宝琮《中国数学史》(1964)p.71.

〔2〕太半是$\frac{2}{3}$，少半是$\frac{1}{3}$.

〔3〕比真值少2.36%.

这一式子为祖暅或祖冲之所求得. 李淳风（公元656年）在开立圆的注里记载了祖暅的算法：

$$d=\sqrt[3]{\frac{21V}{11}}.$$

祖暅取$\pi=\frac{22}{7}$，代入上式即得此结果. 这是一项重大的突破，后面还要专门讨论. [1]

《商功》是第五章，是讲各种立体的体积计算的. 我国自禹（4000多年前）治洪水以来，对于筑城、建堤、挖沟、修渠等工程，积累了丰富的经验. 通过总结、提炼、加工和理论上的探讨，导出了种种工程土方的计算方法. 这些方法统称为"商功"，后来汇编在《九章算术》中. "商"是"商量"、"量度"的意思.

所谓"城、垣、堤、沟、堑（qiàn）、渠"，都是指一种平截头楔形. 上底是矩形（长a，宽c），下底也是矩形（长b，宽c）（图33）. 体积是：

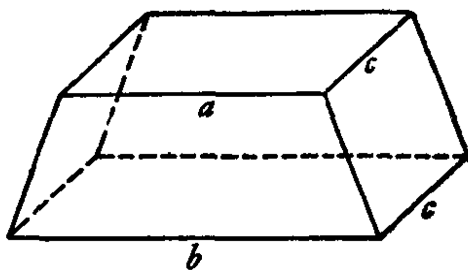


图 33

$$V=\frac{1}{2}(a+b)ch.$$

这是非常有用而且完全正确的公式.

"仓"是长方体，"方堡坊（dǎo）"是上下底都是正方形的长方体. "圆堡坊"是直圆柱，"方亭"是上下底都是正方

〔1〕见本书第十六章第二节. p.406.

形的棱台．此外还有种种立体，也都给出正确的计算公式[1]．

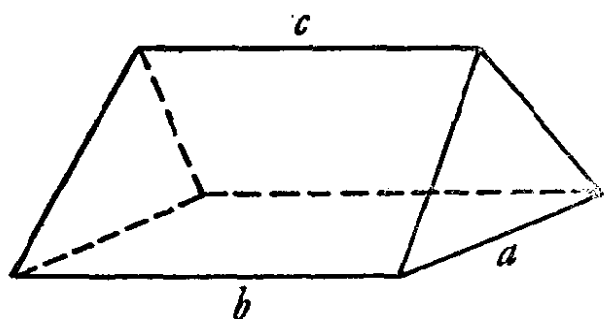


图 34

"刍（chú，草）甍（méng，屋脊）"是象草房顶的一种楔（图34）．

体积$V=\frac{1}{6}ha(2b+c)$

"刍童、曲池、盘池、冥谷"指的都是长方台．就是常看见整整齐齐堆起来的煤堆或碎石堆的形状（图35）．

$$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]$$

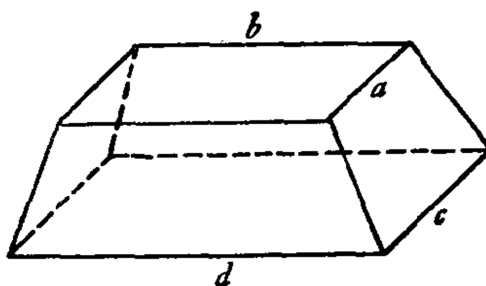


图 35

上述这些体积公式（除了圆周率用$\pi=3$误差较大以外），都是正确的．从分类之细，计算之精，都可以看到我国古代关于体积的知识有极高的水平．

第五节 《盈不足》

第七章是《盈不足》．盈不足术是我国古代解决问题的一种巧妙方法．以第 1 题为例：

---

〔1〕参考李俨《中国算学小史》(1930)pp. 35—38.

“今有共买物，人出八盈三；[1]人出七不足四。[2]问人数、物价各几何？答曰：七人，物价五十三。”

设人数是x，物价是y．每人出a，盈b；每人出a'，不足b'．则

$$\begin{cases} y = ax - b \\ y = a'x + b' \end{cases}$$

解之，得 $x = \dfrac{b+b'}{a-a'}$，$y = \dfrac{ab'+a'b}{a-a'}$，每人应出钱数为

$$\frac{y}{x} = \frac{ab'+a'b}{b+b'}.$$

这种属于算术里“盈亏类”的问题共有8个，解法并不奇怪．对我们更有兴趣的是后面的12个不属盈亏类的问题，书中仍用“盈不足术”去解．且看第10题：

“今有垣高九尺．瓜生其上，蔓日长七寸．瓠[3]生其下，蔓日长一尺．问几何日相逢？瓜瓠各长几何？答曰：五日、十七分日之五．瓜长三尺七寸、十七分寸之一．瓠长五尺二寸、十七分寸之十六．”

这本来是一个很简单的一次方程问题．设x日相逢，则瓜蔓长$0.7x$尺，瓠蔓长x尺，$x+0.7x=9$，$x=5\frac{5}{17}$(日)．但书中却用一种别开生面的解法．

先估计两个近似答案，按题意求出盈与不足之数，再用“盈不足术”来解出真值．

〔1〕若每人出8，就比物价多3．

〔2〕若每人出7，就不足4．

〔3〕瓠音hù，草本植物，爬蔓．

5日之后，瓜蔓长3.5尺，瓠蔓长5尺，还差0.5尺相遇。6日之后，又比9尺多1.2尺。以$a'=5$，$b'=0.5$；$a=6$，$b=1.2$代入盈不足术公式得日数$=\frac{ab'+a'b}{b+b'}=\frac{6\times0.5+5\times1.2}{1.2+0.5}$

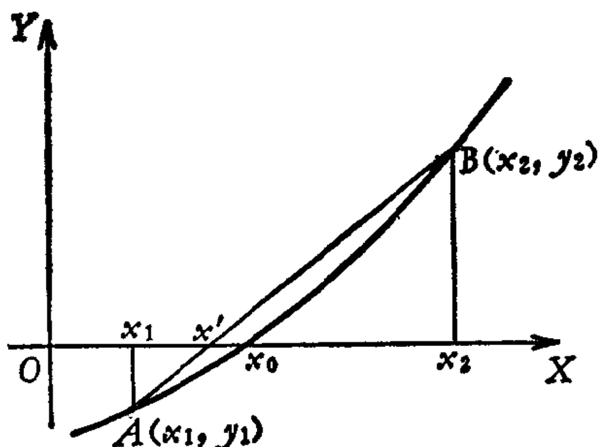


图 36

$=5\frac{5}{17}$（日）.

公式的来源，用近代术语推演如下：

求方程$f(x)=0$的根，相当于求曲线$y=f(x)$与OX轴交点的横坐标（图36）。先估计两个近似答案x_1，x_2。对应的函数值是$y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$。过$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$作直线，方程为

$$y-y_2=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2),$$

交OX轴于(x', o)，$x'=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}$就是方程$f(x)=0$的近似解.

上面例题 $x_1=a'$，$y_1=-b'$；$x_2=a$，$y_2=b$。于是得

$$x'=\frac{a'b+ab'}{b+b'}.$$

这就是《盈不足》章后半部问题的解法公式.

如果$f(x)$是一次函数，x'就是$f(x)=0$根的真值。如果不是一次函数，x'是近似值。累用这种方法，可以逐步逼近

真值. 这种方法现在解高次代数方程或超越方程还常常用到.

这种“盈不足术”实际上就是现在的线性插值法 (linear interpolation). 它还有很多名称, 如试位法 (regula falsi), 夹叉求零点(Eingabeln von Nullstellen)[1], 双假位法 (regula duorum falsorum, double false position)[2] 等等. 它的思想可以上溯到古埃及.[3]

纸草书有一个等差数列的题: 将 100 个面包分给 5 个人, 使成等差数列, 而前 3 人所得的总数的 $\frac{1}{7}$, 正好等于后 2 人所得, 问各得多少?

根据纸草书所列出的数值, 猜想他是这样推算的:

设末项是 A, 公差是 $-d$, 则所求各数是

$$A+4d,\ A+3d,\ A+2d,\ A+d,\ A.$$

$$\frac{1}{7}(A+4d+A+3d+A+2d)=A+d+A, \quad 于是$$

$$d=5\frac{1}{2}A.$$

如果 $A=1$, 那么这 5 个数是23, $17\frac{1}{2}$, 12, $6\frac{1}{2}$, 1, 这样总和是 60. 但已知总和为 100, $\frac{100}{60}=\frac{5}{3}$, 全部数均乘以 $\frac{5}{3}$, 就得到所求的 5 个数: $38\frac{1}{3}$, $29\frac{1}{6}$, 20, $10\frac{5}{6}$, $1\frac{2}{3}$. 解题

---

[1] J. Naas, H. L. Schmid, Mathematisches Wörterbuch, Band I (1962) p.473.

[2] F. Cajori, A History of Mathematics (1919) pp. 13, 103. 另见钱宝琮《盈不足术的发展史》, 载《数学教学》(1955) 1期pp.1—3.

[3] H. Weber,《数学全书》(Enzyklopädie der Elementarmathematik) 第二册, 郑太朴译, (1935)p.165.

的思想实质就是线插值法. 对于 $ax=b$ 类型的问题, 这是可行的. 较复杂的问题, 需要假设两次.

简单的假位法(假设一次)在印度的巴哈沙利残简上重新出现.[1] 希腊的丢番图也用过某种假位法, 他先假设适合某些条件的未知数, 由此得出正确解法的途径.[2] 后来阿拉伯人和欧洲人也使用双假位法.

李约瑟[3]认为西方的双假位法(也就是"盈不足术")可能是中国传过去的. 这一段史实, 还有进一步研究的必要. 总之, 盈不足术确是我国的独立发明, 改称双假位法或试位法为"盈不足术", 是非常恰当的.

第六节 《方程》

《方程》是《九章》的第八章. "方"就是把一个算题用算筹列成方阵的形式. "程"是度量的总名,[4]也有计量, 考核, 程式的意思. "方程"的名称, 就来源于此. 不过和《九章》的原意已有很大的出入. 现在"方程"一词, 原是借用来译 equation (拉丁文 aequatio) 的, 有相等的意思. 粗略地说, 就是含有未知数的等式. 过去有的书加上一个"式"字, 叫做

〔1〕F. Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.99.

〔2〕T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. Ⅰ (1921) p.488.

〔3〕李约瑟《中国科学技术史》译本第三卷(1978) p.266. 钱宝琮《中国数学史话》(1957) p. 35, 建议恢复这种方法原来的名称, 叫做"盈不足术".

〔4〕《荀子·致仕》: "程者, 物之准也."

方程式，现在都取消了. [1]

本章内容是讲解联立一次方程（线性方程组）的. 它给出联立方程的普遍解法，并且使用了负数. 这在数学史上具有非常重要的意义. 以第1题为例：

"今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；[2] 上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗. 问上、中、下禾实一秉各几何？答曰：上禾一秉九斗四分斗之一；中禾一秉四斗四分斗之一；下禾一秉二斗四分斗之三。"

设上、中、下禾每秉各得x、y、z斗，则

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases} \qquad (2)$$

古代是用筹来运算的，未知数不用符号表示，只将各个系数用筹依次（自上至下，自右至左）罗列出来，实际就是分离

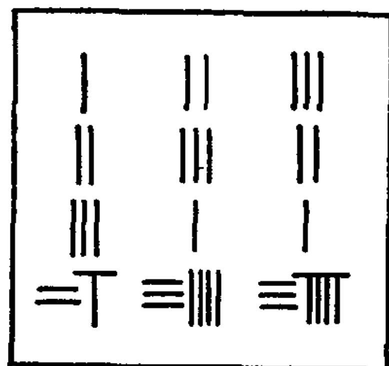
---

〔1〕参见杰《"方程"二字的来历》，载《数学通报》(1962.3) p.30. 清初《阿尔热巴拉算法》（书名显然是 algebra 的音译），译equation为相等式. 1859年李善兰和伟烈亚力合译棣么甘《代数学》，开始译为方程. 然而1873年华蘅芳和傅兰雅合译华里司《代数术》，却译为方程式. 1886年董毓奇著书名《爱夸斯翁》，想是法文 équation的音译. 华蘅芳《行素轩算学·学算笔谈》卷七(1896)，方程与方程式两词并用，方程保持《九章》原来的意义，而方程式指 equation. 本世纪以来，多数书沿用这一译法. 1934年版《数学名词》定名为方程（式），既可用式，也可不用式，二者意义相同. 傅种孙极力主张省去式字，见《中学数学教材精简之报告》，载《自然科学讲座数学之部》(1950.11)p.2.1956年版《数学名词》才确定用方程这个词而废去方程式.

〔2〕有上等的禾3束，中等禾2束，下等禾1束，合起来共得谷粒39斗.

系数法．然后用类似消元法去解．[1]

“术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方；中、左禾列如右方．以右行上禾遍乘中行而以直除．又乘其次，亦以直除．”



上禾秉数
中禾秉数
下禾秉数
实斗数

左行 中行 右行

图 37

将（2）式中第一个方程的各个系数及常数项3，2，1，39列在右方（图37的右行），同样将第二个方程，第三个方程的各个系数及常数项2，3，1，34；1，2，3，26列在中行及左行．用右行上禾的系数3遍乘中行各数得6，9，3，102，然后两次减去右行对应各数，得0，5，1，24．又用3遍乘左行各数得3，6，9，78，减去右行对应各数得0，4，8，39．

“除”是相减，“直除”就是减去对应的各数．减的次数没有限定，总之减到不能再减为止．这样做的目的，是要消去一个未知数．

经过这样的步骤，图37变成图38．左行和中行相当于

---

〔1〕参考(1)钱宝琮《方程算法源流考》，载《古算考源》(1930) pp.25—36.
(2)钱宝琮《九章算术方程术校勘记》，载《数学通报》(1955.6) p.12.
(3)许莼舫《中算家的代数学研究》(1952) pp.3—6.
(4)杜石然《“九章算术”中关于“方程”解法的成就》，载《数学通报》(1956.11) pp. 11—14.

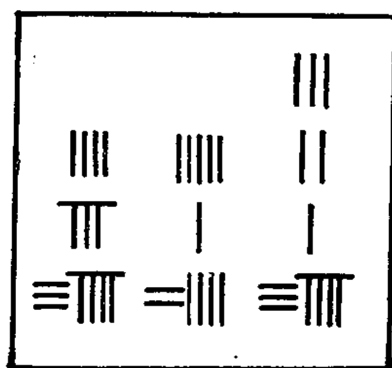


图　38

$$\begin{cases} 5y + z = 24 \\ 4y + 8z = 39 \end{cases}$$

再消去一元就可以得到答案。用中行中禾的系数5遍乘左行得20，40，195，四次减去中行对应的数字5，1，24得0，36，99，这样得到图39。左行相当于

$$36z = 99,$$

$$z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4}.$$

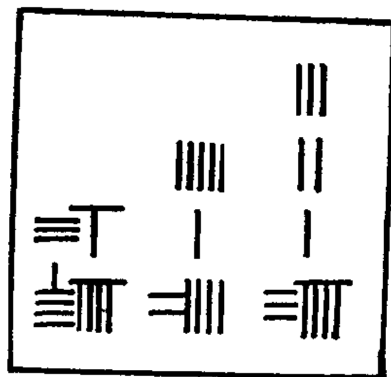


图　39

既解出一个未知数，用代入法就可以求出另外两个未知数来。

这是联立一次方程的普遍解法。除了符号、术语和计算工具不同之外，和现在使用的消元法实质一样。

这一章还有四元（第14、17题）和五元（第18题）的方程，也是用类似的方法来解的。

其他国家有时也解出一些联立方程。例如希腊巴罗斯（Paros，爱琴海上小岛）的塞马力达斯（Thymaridas，约公元前380年）就曾用含混的语句叙述某种特殊联立方程的解法。[1]

[1] T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I (1921) p.94.

稍后于刘徽的丢番图和7世纪印度的婆罗摩及多也解过一些联立方程，但远不及《方程》章的算法整齐，也没有一般的解法．丢番图常常仅用一个记号来代表许多未知数．[1]

1559年法国彪特在《算术》中开始用不同的字母表示不同的未知数，并用不甚完整的（因为那时尚未认识负数）加减消元法解一次联立方程，和《九章算术》相似．[2]这已在刘徽之后1300年，张苍之后1700年了！

至于线性方程组的完整解法，到17世纪末莱布尼兹才着手拟定，由此导致行列式的发明（1693）．[3]1764年，法国的培祖用行列式去建立线性方程组的一般理论．

从时间上来说，《九章》的解法实在是世界数学史上一大光辉成就，值得我国人自豪！

其次，《方程》章里负数的出现也是科学史上破天荒的一件大事！引入负数大概是为了克服在某些场合下应用上述法则所发生的困难．[4]要消去某一元，往往要碰到从小数减去大数的情形．如果不引入负数，方法就不能通行无阻了．

以第3题为例，列成方程

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y+z=1 \\ x+4z=1 \end{cases}$$

〔1〕F. Cajori, A History of Elementary Mathematics(1916) p.35.

〔2〕F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. Ⅰ (1928) p.177.

〔3〕D.E. Smith, A Source Book in Mathematics, vol. Ⅰ (1929) pp. 267—270. 又R.F. Scott《行列式之理论及其应用》，黄缘芳译，p.390.

〔4〕А.П. Юшкевич《中国学者在数学领域中的成就》赵孟养译，载《数学进展》2卷2期(1956)p. 158.

用消元法，就出现从一无所有中减去正数的情形。因此必须用正负术来计算。所谓“正负术”，用现代的算式表述如下。

“正负术曰：

同名相除[1] 〔$(+a)-(+b)=+(a-b)$〕，

异名相益[2] 〔$(+a)-(-b)=+(a+b)$〕，

正无入负之 〔$0-(+b)=-b$〕，

负无入正之 〔$0-(-b)=+b$〕；

其异名相除 〔$(+a)+(-b)=+(a-b)$〕，

同名相益 〔$(+a)+(+b)=+(a+b)$〕，

正无入正之 〔$(+a)+0=+a$〕，

负无入负之 〔$(-a)+0=-a$〕。”[3]

刘徽在注里说：

“今两算得失相反，要令正负以名之。正算赤，负算黑。否则以邪正为异。”

算是算筹，代表数字。两种得失相反的数，分别叫做正数和负数。红筹代表正数，黑筹代表负数。不然的话，将筹斜放和正放来区别也可以。

在刘徽之前，刘洪的《乾象历》（174年）已将正负术应用到历法上去。[4]

《九章》自由使用负数，还可以用第8题来作佐证：

---

〔1〕“除”是减的意思。

〔2〕“益”是加的意思。

〔3〕李俨《中国数学发展情形（续）》，载《数学通报》(1956.5)pp.3—4. 杜石然《“九章算术”中关于“方程”的解法的成就》，载《数学通报》(1956.11)pp. 13—14.

〔4〕严敦杰《中国古代数学的成就》(1956)p.15.

“今有卖牛二、羊五，以买十三豕，有余钱一千．[1]卖牛三、豕三，以买九羊，钱适足．卖羊六、豕八，以买五牛，钱不足六百．问牛、羊、豕价各几何？”

“术曰：如方程，置牛二、羊五正，豕十三负，余钱数正；次置牛三正，羊九负，豕三正；次置牛五负，羊六正，豕八正，不足钱负．以正负术入之．”

列成方程就是

$$\begin{cases} 2x+5y-13z=1000 \\ 3x-9y+3z=0 \\ -5x+6y+8z=-600. \end{cases}$$

负数出现在各项系数及常数项中．而且明白地指出“卖”是正，则“买”是负，“余钱”是正，则“不足钱”是负．在另外的问题中又指出“益实”（加入谷子）和“损实”（减去谷子）的符号相反．

这是世界科学史上第一次突破了正数的范围，也是对负数第一次作出的合理解释！

比之希腊，丢番图虽然知道“减数乘减数得加数，加数乘减数得减数，”[2]施用于 $(x-1)(x-2)$ 一类的乘法．但奇怪的是完全缺乏负数的概念．[3]他认为式子 $2x-10$ 中 $2x<10$ 是荒谬的．

印度第7世纪的婆罗摩及多才开始认识负数，并用小点或小圈记在数字上面表示负数．12世纪的婆什迦罗解释负数是负

[1] 用卖2头牛、5头羊的钱来买13头猪，剩钱1000．

[2] T. Heath, A History of Greek Mathematics, vol. I (1921) p. 460.

[3] F. Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.35.

债或损失的意思，也许是见到中国数学书的缘故。中亚细亚的数学家吸取了印度人的知识，并没有在负数问题上添加什么新的东西[1]。

欧洲第一个给出负数正确解释的是斐波那契，他解决一个关于某人的赢利问题时说："我将证明这问题不可能有解，除非承认这个人可以负债。"

1484年法国的舒开给出二次方程一个负根。卡当在1545年区分了正负数，把正数叫做"真数"(numeri ueri)，负数叫"假数"，(numeri ficti)，并正式承认了负根。然而在巴巧利整个著作中却看不到负数的踪迹，他仅仅重复丢番图的运算法则：减数乘减数得加数。著名的德国数学家史提非在1544年竟说"负数"是"无稽"的或"虚伪的零下"，因为它是从零减去"零上的数"。[2]

甚至到18世纪有些数学家还有类似的看法，他们把"零"解释为"什么也没有"，而小于零的数是很奇怪的，因为有什么东西可以小于"什么也没有"呢？并且绝大多数的数学家认为 $(+a)(-b)=-ab$，$(-a)(-b)=+ab$ 没有真实内容。[3]

由此看来，西方负数概念的发展是出奇地缓慢的。相反地，我国在两千多年前不但认识了负数，规定表示负数的方法，指出负数的实际意义，而且用到解方程上去。这真是历史上值得大书特书的一桩事。

《方程》章第13题"五家共井"是不定方程的问题。将在

〔1〕V. Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p.183.

〔2〕F. Cajori, A History of Mathematics (1919) p. 141.

〔3〕B.H. Молодший 《18世纪和19世纪上半期数的学说》，载《数学通报》(1956.8)p.19.

十五章第二节里介绍.

第七节 《勾股》

这是《九章》的第九章，也是最后一章. 讨论用勾股定理解决应用问题的方法. 如第 6 题：

“今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺. 引葭赴岸，适与岸齐. 问水深、葭长各几何？答曰：水深一丈二尺；葭长一丈三尺.”

后世有很多类似的题目，或者引自《九章》，或者受《九章》的影响.

如《张邱建算经》卷上第13题：“今有葭生于池中，出水三尺，去岸一丈. 引葭趋岸，不及一尺. 问葭长及水深各几何？”

朱世杰《四元玉鉴》(1303) 卷中之六，用歌谣体给出：

“今有方池一所，每面丈四方停；葭生西岸长其形，出水三十寸整；东岸蒲生一种，水上一尺无零，葭蒲梢接水齐平. 借问三般怎定？”

又明程大位《算法统宗》(1593年)卷 8：“今有葭二茎生池中，并根杪齐，出水三尺. 引葭一茎斜去至岸九尺，与水适平. 问水深若干？”

有趣的是，类似的题目也出现在印度作家的书中，不过不是葭而是荷花：[1]

“平平湖水清可鉴，面上半尺生红莲；

---

〔1〕引自Я.И. Перельман《趣味几何学》(上册)，符其珣译 (1951) p.69.

出泥不染亭亭立，忽被强风吹一边。
渔人观看忙向前，花离原位二尺远；
能算诸君请解题，湖水如何知深浅？”

《勾股》章第13题：

“今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺．问折者高几何？”

类似的题出现在印度婆罗摩及多的《不定方程讲义》中[1]：

“竹高十八尺，吹折尖抵地，离根六尺远，两段请寻觅。”

通过这些题目的类似性和时间先后的对比，我们有理由相信《九章算术》曾输入印度．[2]

《勾股》章还有一些二次方程的题，答案只取正根．总的说来，《九章算术》是我国古代人民伟大的智慧结晶，它在历史上有崇高的地位。

第八节 《海岛算经》

刘徽的功劳除了注释《九章》，创立割圆术，运用极限概念以外，还推广了陈子测日法，使“重差术”发扬光大起来．

在刘徽的《九章算术注原序》中，一半以上的文字是叙述造“重差术”的缘由和意旨的，而割圆术反而只字未提．可见“重差术”是他生平的得意杰作．

刘徽看到古时“九数”中有一种算法叫做“重差”，[3]但

〔1〕D.E. Smith, History of Mathematics (1923) p.159.

〔2〕参考沈康身《中国古算题的世界意义》，载《数学通报》(1957.6) pp.1—4.

〔3〕九章也叫九数．九数的条目，各家记载不一．有的除了方田，粟米，……之外还有“重差”．见李俨《九章条目》，载《中国古代数学史料》(1957) pp.107—111.

内容已经失传．又见《周官》（《周礼》的原名）中说大司徒（官名）夏至日立八尺之表测日影，定日地的距离，于是推想这就是"重差术"．"重"就是重复，"差"就是日影的相差，测两次求日影的差，就可以算出距离．

他在《序》里说：

"苍等为术，犹未足以博尽群数也．[1]徽寻九数，有'重差'之名，原其指趣，乃所以施于此也．[2]凡望极高、测绝深而兼知其远者必用'重差'．……虽天圆穹之象，犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉！……辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于《勾股》之下．"

由此可知，刘徽认为"重差"就是一种测量可望而不可即的目标的方法．他选择了若干典型问题，编成一章，附在《勾股》章的后面．唐初选定十部算经时，《重差》和《九章》分离开来成为单行本．因为第1题是测望海岛，所以称为《海岛算经》．[3]

第1题：

"今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直．从前表却行[4]一百二十三步，人目着地，取望岛峰，与表末参合．从后表却行一百二十七步，人目着地取望岛峰，亦与表末参合．问岛高及去表各几何？答曰：岛高四里[5]五十五步．去表一百二里一百五十步．"

〔1〕张苍等人所修订的《九章算术》，并没有将所有的算法包罗无遗．

〔2〕推测其本来的意义和宗旨，就是用于测日这种算法的．

〔3〕钱宝琮校点《算经十书》(1963)p．261，《海岛算经提要》．

〔4〕向后退行．

〔5〕1里＝300步，1步＝6尺．

图40中，IS 是海岛，立两表 FD，CA与 IS对齐，$FD=CA=h=3$（丈）$=5$（步）。$CF=AD=d=1000$（步），$EF=b=123$（步），$BC=127$（步）。求岛高 $x+h$ 与前表 FD 与岛的距离 y。

图 40

作 $AG \parallel DE$，则 $GC=EF=b$。又 $\triangle ABC \backsim \triangle SAK$，$\triangle AGC \backsim \triangle SDK$，于是有

$$\frac{KS}{CA}=\frac{x}{h}=\frac{AD}{BG}=\frac{d}{a}, \qquad x=\frac{hd}{a}.$$

海岛高 $IS=\frac{hd}{a}+h$。$\frac{DK}{GC}=\frac{y}{b}=\frac{AD}{BG}=\frac{d}{a}$，

$$y=\frac{bd}{a}.$$

“术曰：以表高（h）乘表间（d）为实[1]，相多（a）[2]为法，[3]除之。所得加表高，即得岛高（IS）。求前表去岛远近

〔1〕分子。

〔2〕BC与EF的差。

〔3〕分母。

者，以前表却行(b)乘表间(d)为实，相多(a)为法，除之，得岛去表里数．”

$$IS=\frac{hd}{a}+h=\frac{5\cdot1000}{127-123}+5=1255\text{（步）}=4\text{（里）}$$

55（步）．

$$y=\frac{bd}{a}=\frac{123\cdot1000}{127-123}=30750\text{(步)}=102\text{(里)}150\text{(步)}.$$

第9题是相当复杂的题：在高山A处（图41）居高临下望一矩形的城$MNPQ$．将矩DAC垂直放在山上，与MP对齐

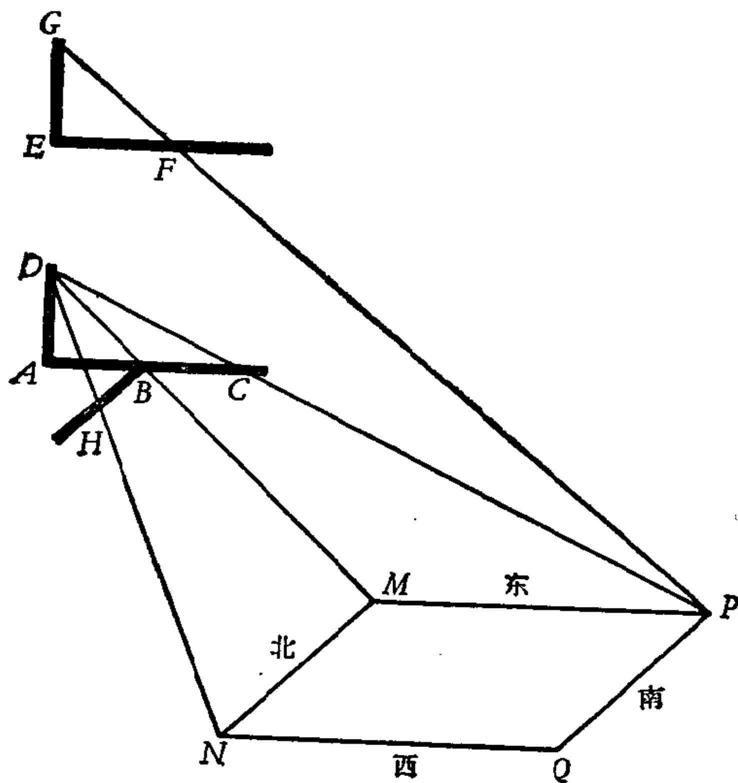


图 41

（DAC与MP共面）．令$AD=3.5$（尺），从D望M，得交点B，$AB=12$（尺）．另外在B处放一勾BH，$BH\perp AC$，D，BH，MN共面，从D望N，得交点H，$BH=5$（尺）．从D

望P，得交点C，$AC=18$（尺）．另放置一矩GEF于上方E处．AD，EG共线，$EF /\!/ AC$．$AE=40$（尺）．从G望P，得交点F，$EF=17.5$（尺）．求城的长、宽．答案是$MP=$1里100步，$MN=$1里$33\frac{1}{3}$步．

解法和其他题目一样，是以相似三角形为依据的．[1]

《海岛算经》虽然只有9个题目，然而从这些题目的创造性、复杂性和富有代表性来看，已经将重差术发挥得淋漓尽致．我们也可以看到刘徽对测量术造诣之深，不但大大超过了当时的西方，即使16、17世纪西方的测量术比起刘徽来，也是望尘莫及．只有一点美中不足，就是完全缺乏角度的概念．否则，在刘徽时代也许早已发展成为一套完整的三角学了．

〔1〕解法参看李俨《中国古代数学史料》(1963)p.134.许莼舫《中算家的几何学研究》(1953)pp.22—23．又许莼舫《重差术与三角测量》，载《数学通报》(1961.7) pp.23—28.

第十五章　其他算经

第一节　《孙子算经》

《孙子算经》的著作年代没有确实的记载．戴震（1724—1777，安徽休宁人，字东原）根据卷下第33题："今有长安、洛阳相去九百里．"又第4题："今有佛书凡二十九章，……"断定是汉明帝以后的书．[1]因为长安是汉初才有的地名．[2]而佛书开始传入中国是汉明帝(58—75)时的事．[3]此说比较可信．

另一方面，《夏侯阳算经序》里说："《五曹》、《孙子》述作滋多，甄鸾、刘徽为之详释．"刘徽是3世纪时人，所以《孙子》成书不会迟于3世纪．大概可以确定在公元67—270年之间．

《孙子算经》全书分三卷，卷上详尽讨论了度量衡的单位和筹算的制度和方法．

"凡算之法，先识其位．一从十横，百立千僵，千十相望，

〔1〕阮元(1764—1849)《畴人传》(1799)卷一《孙子》．李俨《中国古代数学史料》(1963)p.112《孙子算经补注》．

〔2〕臧励和等编《中国古今地名大辞典》(1930)p.550，"长安，古都城也，名始于汉．……高帝自栎阳徙都长安，即此．"

〔3〕佛教流传最早的记载是汉明帝永平八年(65)．见范文澜《中国通史简编》第二编(1965)p.241．

万百相当．"

大意是说：用算筹记数和运算，首先要识别筹的位置．算筹记数有纵、横两种格式．[1]个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，万位用纵式．其余纵横相间．

卷中是分数的应用题，包括面积、体积、等比数列等计算题，大致不出《九章》的范围．

卷下第31题：

"今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足．问雉、兔各几何？答曰：雉二十三，兔一十二．"

这是后世"鸡兔同笼"题的始祖．后来传到日本，变成"鹤龟算"．[2]

具有重大意义的是卷下第26题：

"今有物不知其数，三三数之剩二；五五数之剩三；七七数之剩二．问物几何？答曰：二十三．"

现有一些东西，不知其数．三个三个一数剩两个，五个五个一数剩三个，七个七个一数剩两个；也就是被3除余2，被5除余3，被7除余2．问这些东西有多少？

这就是后来驰名于世界的"大衍求一术"的起源．也是全部《算经十书》甚至整个中国古代数学中最有独创性的成就之一．

这问题属于不定方程，用普通的代数方法列成方程组是

$$\begin{cases} x = 3a + 2 \\ x = 5b + 3 \\ x = 7c + 2. \end{cases}$$

[1] 见本书第三章第二节 pp.39—40．

[2] 藤原松三郎《日本数学史要》（1956）p.69．

其中x是所求的数，a,b,c 分别表示用3,5,7去除 x 所得的商。答案无穷多，要的是正整数解。23,128，233，338，…都是它的解。23是最小正整数解，其余的解可表示成

$$23+105n \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

105是3,5,7的最小公倍数。知道一个解就可以知道全部的解。先看看《孙子》的解法。

“术曰：三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十；并之，得二百三十三，以二百一十减之即得。凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之即得。”

先记下70，21，15这三个常数。为了叙述的简便，我们约定用3〔M〕表示3的倍数，5〔M〕表示5的倍数等等。70是5与7的倍数，是3的倍数多1（被3除余1）；21是3与7的倍数，是5的倍数多1；15是3与5的倍数，是7的倍数多1。以约定的符号来表示：

$$70=3[M]+1=5[M]=7[M] \quad (1)$$

$$21=3[M]=5[M]+1=7[M] \quad (2)$$

$$15=3[M]=5[M]=7[M]+1 \quad (3)$$

用3,5,7除的余数2,3,2分别乘（1），（2），（3）式，便得

$$140=3[M]+2=5[M]=7[M]$$

$$63=3[M]=5[M]+3=7[M]$$

$$30=3[M]=5[M]=7[M]+2$$

$$\overline{233=3[M]+2=5[M]+3=7[M]+2}$$

最后一行是三式相加的结果。它表明233是3的倍数多2，5的倍数多3，7的倍数多2，正是所求的解。减去两次105，

即得最小解23.

一般说，只要用3，5，7除的余数 r_1，r_2，r_3 分别乘70，21，15这3个常数然后相加，便得所求答案．即

$$x = 70r_1 + 21r_2 + 15r_3$$

$$= 3[M] + r_1 = 5[M] + r_2 = 7[M] + r_3.$$

如这数大于105，就减去105若干次，即得最小答案．

以上是《孙子》这一段话的解释．[1]

为了记忆70，21，15这三个常数，明代程大位《算法统宗》（1592年）编成歌诀：

"孙子歌曰：

三人同行七十稀，

五树梅花廿一枝，

七子团圆正半月，

除百令五便得知．"

这歌流传很广，现在民间知道这歌的相当普遍，不过随地点不同而字句稍异．实际上在程大位之前的宋周密早已编成类

[1] 解释《孙子》算法的文章很多．如：（1）傅种孙《大衍术》，载《北京高师数理杂志》3期（1920）．（2）钱宝琮《古算考源》（1927）pp.45—66，《求一术源流考》．（3）李俨《中算史论丛》（一）（1954）pp.122—174，《大衍求一术的过去和未来》．（4）刘薰宇《数学趣味》．（5）许莼舫《古算法之新研究》（1935）pp.13—28，《求一术》．（6）钱宝琮《中国数学史话》（1957）pp.138—143，《剩余定理和大衍求一术》．（7）华罗庚《从孙子的"神奇妙算"谈起》（1964）．（8）李文林，袁向东《中国剩余定理》，载《中国古代科技成就》（1978）pp.111—121．（9）宋守信《韩信大点兵》，载《科学大众》（1957.6）p.251．

似的歌诀，不过没有程大位的歌那么流行：

“三岁孩儿七十稀，

五留廿一事尤奇，

七度上元重相会，

寒食清明便可知。”

“上元”是阴历正月十五，即元宵节，隐含数字15. “寒食”是节令名. 《荆楚岁时记》载：“冬至后一百五日，谓之寒食，禁火三日.”[1] 冬至一般在12月22日，清明在4月5日，前后105天，所以最后一句是隐指105.

《孙子》“物不知数”题在我国学术界引起很大的兴趣，特别是因为和历法有密切关系，所以历代都有人研究. 这一类算法的名称很多. 宋代周密《志雅堂杂钞》卷下称为“鬼谷算”、“隔墙算”. 宋代杨辉《续古摘奇算法》（1275）叫“秦王暗点兵”、“翦（同剪）管术”，将3、5、7推广到其他除数如7、8、9，11、12、13等. 明代严恭《通原算法》（1372）用除数77、78. 明周述学《历宗算会》（1558）叫“总分”. 明程大位《算法统宗》（1592）叫“物不知总”、“韩信点兵”.

3、5、7在后来的术语里叫“定母”，70、21、15叫做“乘数”. 乘数是怎样来的呢？如果不用3、5、7而用别的定母，那么对应的乘数是什么呢？《孙子》都没有说明. 到宋秦九韶（1247）才大力推广其算法，建立它的理论基础.

不难看出，70是5与7最小公倍数35的2倍，21是3与7

---

〔1〕相传起于晋文公（公元前697—628年）悼念介之推事，以介之推抱木焚死，就定这天禁火寒食.

的最小公倍数的1倍，15是3与5最小公倍数的1倍。这2、1、1的倍数秦九韶叫做“乘率”。求出乘率，就可以知道乘数。乘率是问题的关键。举一个例来说，用5、7、9作定母，求得乘率是2、5、8，用这3个乘率分别乘7与9，5与9，5与7的最小公倍数63、45、35得“乘数”126、225、280。具有性质

$$126=5[M]+1=7[M]=9[M],$$

$$225=5[M]=7[M]+1=9[M],$$

$$280=5[M]=7[M]=9[M]+1.$$

设已知某数被5除余2，被7除余4，被9除余3，则答案之一是$126\cdot2+225\cdot4+280\cdot3=1992$，1992被5、7、9的最小公倍数315（叫做“衍母”）除，余数102，就是最小答案。

秦九韶《数书九章》（1247）给出“乘率”的求法，并把这类算法称为“大衍求一术”。在秦九韶之前，已有“求一术”的名称。“求一”大概是指求出一个数，被某数除余一的意思。而“大衍”本来是《易经》中的词[1]，后来用到历法和数学上。秦九韶喜欢研究易象，《数书九章》卷一第一部分就以“蓍（shī，草名，古时用其茎来占卜）卦发微”作标题，用求一术来推演易象。也许是故弄玄虚，在“求一术”上面冠以“大衍”字样，称为“大衍求一术”。

秦九韶的著作是自《孙子》以来“求一术”的最大进步。到清代的张敦仁（1803），骆腾凤（1843），时曰醇，黄宗宪（1874）等对此术都有所推进。特别是黄宗宪发现求“乘率”

[1] 《易经》卷七《系辞》上：“大衍之数五十，其用四十有九。”

的简法，使“求一术”大显于世。[1]

英国人伟烈亚力1852年在《华北先驱周报》(North China Herald)上以“Jottings on the science of chinese arithmetic”(《中国算术科学摘记》)为题，介绍了“大衍求一术”，中国独特的古老算法开始为欧洲人所知。1856年比纳次基(K. L. Biernatzki)译成德文，1862年特开姆(O. Terquem)又译成法文。1874、1876年德国人马提生(Ludwig Matthiessen, 1830—1906)又先后详细向西方介绍了求一术，受到世界学者的瞩目。[2]

马提生指出，求一术的原理实际上已和19世纪高斯《算术探究》的下述定理一致：

设$m=m_1m_2m_3\cdots$，其中 $m_1, m_2, m_3, \cdots$两两互素；并设

$a_i\equiv0 \pmod{m/m_i}$，$a_i\equiv1 \pmod{m_i}$ $(i=1,2,3,\cdots)$，则 $x=a_1r_1+a_2r_2+\cdots$是同余式组

$$x\equiv r_1 \pmod{m_1},\quad x=r_2 \pmod{m_2},\cdots$$

的解。

这已在秦九韶之后五、六百年，在孙子之后一千五、六百年了！

现今一般数论书中将下面的命题称为“中国剩余定理”(Chinese remainder theorem)：

设 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 两两互素，则满足同余式组

$x\equiv b_1 \pmod{m_1},\cdots,\ x\equiv b_k \pmod{m_k}$

〔1〕求一术的原理和近代连分数的理论是相通的，见梁宗巨《用大衍求一术解不定方程之一种改进》，载《数学通讯》(1952.9) pp. 1—4.

〔2〕Leonard Eugene Dickson, History of the Theory of Numbers, vol. Ⅱ (1952) pp. 57—58.

的数必存在，且构成一以$\prod_{1}^{K} m_i$为模的同余类。[1]

耐人寻味的是，在意大利斐波那契的《算盘书》中引用了《孙子》的算法而不加证明：

一个不超过105的数分别被3、5、7除，如果余数是2、3、4，那么这个数可按下法求得

$$2\cdot70+3\cdot21+4\cdot15=263,$$

$$263-2\cdot105=53\text{（答）}.$$

同样，一个不超过315的数被5、7、9除，得3个余数，将这些余数各乘以126，225，280之后再相加，其和如大于315，就减去315的倍数，这样可将这个数求出来。[2]

以后在欧洲的数学书中也屡次出现《孙子》的算法。[3]因此，伟烈亚力大概不是将"求一术"西传的第一人。中国学术如何外传，蛛丝马迹，有待进一步探索。

第二节 《五曹》、《夏侯阳》、《五经》、《张邱建》

"曹"是古时分科办事的官署。《五曹算经》是为地方行政职员编写的应用算术书，它的著者和年代都没有记载。

〔1〕例如见Harry N. Wright, First Course in Theory of Numbers (1951) p.55.《英汉数学词汇》(1974)定名为"孙子剩余定理"或"大衍求一术"。也可以简称为"孙子定理"，见华罗庚《数论导引》(1957) p.32.又陈景润《初等数论》Ⅰ(1978) p.83.

〔2〕L.E.Dickson, History of the Theory of Numbers (1952) pp. 59—60.库兹(M.Curtze)曾指出(1896)，如果这法则是斐波那契独立发现的话，他必会声明或给出证明。

〔3〕А.П.Юшкевич《中国学者在数学领域中的成就》，赵孟养译，载《数学进展》2卷2期(1956)p.269.

欧阳修《新唐书》卷五十九《艺文志》有："甄鸾《五曹算经》五卷。"其他各书也有类似的记载。甄鸾是535—566年前后的人，《五曹》可以暂定为5、6世纪的作品。它没有给数学添加什么新的东西。

《夏侯阳算经》卷一"言斛法不同"一段说："至梁大同元年（535年）甄鸾校之"，可见成书不能在535年之前。再看《张邱建算经序》里"其《夏侯阳》之'方仓'，《孙子》之'荡杯'，此等之术皆未得其妙"的话，又可知《夏侯阳算经》必在《张邱建》之前，而后者是甄鸾注释过的。这说明《夏侯阳》也不能在甄鸾之后，由此可以断定是甄鸾时代（6世纪）的产物。[1]

书分上、中、下三卷，卷上"明乘除法"部分说："十乘加一等，百乘加二等，千乘加三等，万乘加四等。"可解释为$10=10^1, 100=10^2, 1000=10^3$，$10000=10^4$。又"十除退一等，百除退二等，千除退三等，万除[2]退四等。"可解释为$\frac{1}{10}=10^{-1}$，$\frac{1}{100}=10^{-2}$，$\frac{1}{1000}=10^{-3}$，$\frac{1}{10000}=10^{-4}$。[3]

假如这种解释正确的话，那么我国不但是最早使用负数的国家，而且是最早具有指数与负指数概念的国家。不过这并不是唯一可能的解释，"加一等"、"退一等"也许只是筹算的术语。"加一等"是将筹向左移动一位，"退一等"是向右移

〔1〕钱宝琮校点《算经十书》p.551《夏侯阳算经提要》，说这是一部伪书，作者可能是韩延（8世纪）。

〔2〕原文为"乘"，按前后文，疑为"除"字之误。

〔3〕李俨《中国算学史》（1955）p.26.

一位．相当于将小数点向右或向左移．无论如何，可以作为使用十进分数（小数）的旁证．

《五经算术》一般认为是甄鸾所作，[1]目的是对古代经籍（《易》、《诗》、《书》、……）的注解中有关数字计算作一些解释．主要讲历法和乐律，没有算题．

《张邱建算经》由于提出了“百鸡术”，所以比较有名．甄鸾注释过，故成书不会晚于6世纪中叶．[2]书虽在刘徽、祖冲之之后，但圆周率仍用“径一周三”．开立圆（已知球体积，求直径）也沿用《九章》不正确的公式．可见刘徽和祖冲之父子的工作，在当时并不普遍地受到重视和接受，这是很可惜的事．

卷下最后一题（第38题）：

“今有鸡翁[3]一，直[4]钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，直钱一．凡百钱，买鸡百只．问鸡翁、母、雏各几何？答曰：鸡翁四，直钱二十；鸡母十八，直钱五十四；鸡雏七十八，直钱二十六．又答：鸡翁八，直钱四十；鸡母十一，直钱三十三；鸡雏八十一，直钱二十七．又答：鸡翁十二，直钱六十；鸡母四，直钱十二；鸡雏八十四，直钱二十八．”

设公鸡、母鸡、小鸡各x，y，z只，则

$$\begin{cases}5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100,\\ x+y+z=100.\end{cases}$$

〔1〕李俨认为没有根据，见《中国算学史》（1955）p.27.

〔2〕钱宝琮认为是466—485年之间，见钱宝琮点校《算经十书》p.325.

〔3〕公鸡.

〔4〕“直”同“值”.

这是不定方程，共有3组答案：

$$\begin{cases} x=4, \\ y=18, \\ z=78. \end{cases} \quad \begin{cases} x=8, \\ y=11, \\ z=81. \end{cases} \quad \begin{cases} x=12, \\ y=4, \\ z=84. \end{cases}$$

一问多答，是过去任何书中所没有的，百鸡题开其先例. 原书没有给出解法，只说："术曰：鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得."公鸡4只共值钱20，母鸡7只值钱21. 如少买7只母鸡，就可多买4只公鸡和3只小鸡. 所以只要得出一组答案，就可以推得其余二组. 但这解法是怎样来的？书中没有说明. 也许原来有解法，传抄时脱漏，也未可知.

后人添上一种解法，作者大概是谢察微，[1] 但只是数字的凑合. 到了清代，焦循(1763—1820)《加减乘除释》(1799)指出其错误，骆腾凤《艺游录》(1815)用大衍求一术来解. 丁取忠《数学拾遗》(1874)给出一个较简易的解法：先设没有公鸡，用100钱买母鸡和小鸡100只，得母鸡25只，小鸡75只. 现在少买7只母鸡，多买4只公鸡和3只小鸡，便得第一组答案. 同理可推出其余二组. 后来时曰醇(1870年左右)推广了百鸡题，作《百鸡术衍》，于是百鸡术灿然大著.[2]

在我国，不定方程的研究并不是从《张邱建》才开始的. 《九章算术》第八章《方程》第13题"五家共井"就是不定方程：

"今有五家共井，甲二绠[3]不足，如乙一绠；[4]乙三绠不

---

〔1〕在李淳风(656)之前.

〔2〕钱宝琮《古算考源》(1927)pp.37—44，《百鸡术源流考》.

〔3〕绠(gěng)，汲水用的绳子.

〔4〕甲家两条绳子接起来，还差乙家一条绳子才够长.

足，如丙一绠；丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，如戊一绠；戊六绠不足，如甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮[1]。问井深、绠长各几何？答曰：井深七丈二尺一寸。甲绠长二丈六尺五寸，乙绠长一丈九尺一寸，丙绠长一丈四尺八寸，丁绠长一丈二尺九寸，戊绠长七尺六寸。”

设甲、乙、丙、丁、戊各家绳子长x,y,z,u,v，井深 h，则这是含 6 个未知数的不定方程组

$$\begin{cases} 2x+y=h, \\ 3y+z=h, \\ 4z+u=h, \\ 5u+v=h, \\ 6v+x=h. \end{cases}$$

因为单位是任意的，故答案无穷多。[2]原书没有写出解答步骤，只列出一种答案。这是我国最早的不定方程问题。

希腊的丢番图大规模地研究不定方程，已在《九章》之后，也在刘徽之后．印度的阿利耶毗陀和婆罗摩及多就更晚了。

第三节 《缉古算经》

《缉古算经》的作者是唐代王孝通，时间在公元630年左右。象我国很多数学家一样，关于王孝通的事迹知道的很少，生卒年月也没有记载。

〔1〕到达水面。

〔2〕许莼舫《中算家的代数学研究》（1952）p.10《从五家共井说到不定方程》。

唐高祖武德六年（623年），王孝通是算历博士（官名），和祖孝孙一起校勘傅仁均所订的《戊寅元历》（阮元《畴人传》卷十三），可见王孝通对历法是深有研究的．后来又做过太史丞（掌管星历的官）．

王孝通在《上缉古算经表》中说：

“刘徽……思极毫芒，[1]触类增长，[2]乃造重差之法，列于终篇．[3]……亦一时独步．……但旧经残驳，尚有缺漏．自刘以下更不足言．其祖暅之缀术，[4]时人称之精妙．曾不觉方邑进行之术，全错不通．刍甍、方亭之问于理未尽．”

王孝通很钦佩刘徽的重差术，但他认为刘徽之后，数学家的建树便没有多少可取之处．特别是大家所称赞的祖暅的《缀术》，里面“方邑进行之术”完全错误，刍甍、方亭的算法也没有发挥尽致．《缀术》现在已经失传，不知他指摘祖暅的错误是什么．照王孝通的口气和他的专长，大概是指有关二次和三次方程的问题．王孝通的说法是偏激的，实际上祖冲之、祖暅的成就是很大的，当然不排除出现过某些错误．

《缉古算经》是《十书》最晚的一种，也是最难懂的一种．其巨大的学术价值在于它是世界上最早提出三次方程代数解法的著作．

巴比伦人（三千多年前）会利用数表来解某种三次方程，

---

〔1〕思想精深细微．

〔2〕触类旁通，对旧说有所增进．

〔3〕指刘徽作《海岛算经》，附于《九章》之末．

〔4〕此句有几种可能解释：祖暅也叫祖暅之，之字可以解释作“的”，也可以作为人名．缀术可以是书名，也可能指一种方法．

只是一种推测．希腊的门内马斯遇到过三次方程$x^3=2a^3$，不过他是用圆锥曲线来求解的．阿基米德也用类似的方法解过三次方程．这种作图解法到阿尔·卡西得到充分的发展．13世纪斐波那契得出一个三次方程的数值解，已在王孝通之后六百多年．一般三次方程的代数解法到16世纪才在意大利出现，晚于王孝通8、9个世纪．因此王孝通的成就是值得赞扬的！

《缉古算经》20个问题中，除了第1题是历法之外，其余都是体积计算和勾股定理应用的问题．多数用到三次方程．举两个典型的例，第15题：

“假令有勾股相乘，幂七百六、五十分之一；弦多于勾三十六、十分之九．问三事各多少？答曰：勾十四、二十分之七；股四十九、五分之一；弦五十一、四分之一．”

设有直角三角形，两直角边相乘之积是$706\frac{1}{50}$；弦比小直角边大$36\frac{9}{10}$，[1]问三边各多少？

设勾、股分别长x,y，则

$$xy=706\frac{1}{50}=P,\quad \sqrt{x^2+y^2}-x=36\frac{9}{10}=Q.$$

消去y，得

$$x^3+\frac{Q}{2}x^2=\frac{P^2}{2Q}.$$

以P,Q的数值代入，化简得三次方程

[1] Yoshio Mikami（日本三上义夫），The Development of Mathematics in China and Japan (1913) p.54 引用这题目时误为$30\frac{9}{60}$. F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p.74引用Mikami的数据时也未加订正．

$$500x^3+9225x^2-3377129=0,$$

有有理根 $x=\frac{287}{20}=14\frac{7}{20}$.[1]这有理根就是所求勾的长.

$x+Q=14\frac{7}{20}+36\frac{9}{10}=51\frac{1}{4}$是弦长，$\frac{P}{x}=49\frac{1}{5}$是股长.

这里应该强调指出我国学者的高度技巧，他们善于挑选问题的数字，使方程的根恰好是有理数.

王孝通没有写出解题的步骤，但无疑和宋、元的天元术相仿，或者是后者的雏形. 当时用筹来计算，不必先列成和现在一样的方程然后求解，而是取常数项及一次、二次项系数，摆成开立方的阵势，直接进行运算. 而且永远使三次项的系数为一，所以在术文中不提三次项.[2]

再看看有代表性的第 2 题前半部:

"假令太史造仰观台，上广袤少，下广袤多. 上下广差二丈，上下袤差四丈，上广袤差三丈，高多上广一十一丈. 甲县差一千四百一十八人，乙县差三千二百二十二人. 夏程人功常积七十五尺，限五日役台毕. ……问台广、高、袤各几何? 答曰：台高一十八丈，上广七丈，下广九丈，上袤一十丈，下袤一十四丈."

假设太史官要建造一个长方台形的观象台，下底的长、宽都大于上底的长、宽. 上、下宽差 2 丈，上、下长差 4 丈，上长、宽差 3 丈，高比上宽多11丈. 甲县派1418人，乙县派3222人参加建台. 夏季施工，每人每日筑75立方尺，限 5 日完成. 求台

---

〔1〕另有两个虚根 $x=-\frac{82}{5}\pm\frac{41}{5}\sqrt{3}i$，当时未知.

〔2〕解法步骤参考许莼舫《中算家的代数学研究》(1952) pp. 56—72. 又同一作者《古算法之新研究续编》(1945)第七章《辑古术》.

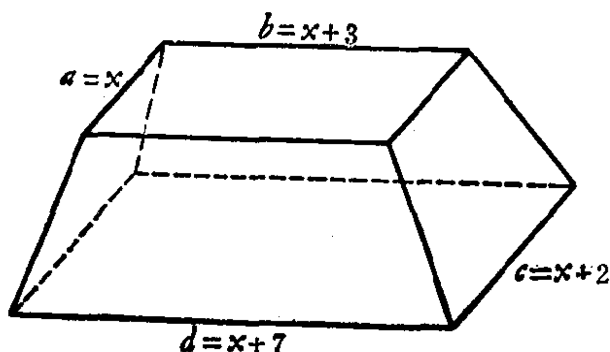


图 42

的长、宽、高。

设上宽为 $a=x$（丈），则下宽为 $c=x+2$，上长 $b=x+3$；下长 $d=x+7$，高 $h=x+11$（图 42）．两县共派4640人，5日共完成土方 $V=4640\times0.075\times5=1740$（丈^3）．代入《九章》《商功》章刍童（长方台）体积公式

$$V=\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c],$$

有 $1740=\frac{x+11}{6}[(2x+6+x+7)x+(2x+14+x+3)(x+2)]$

化简得 $3x^3+51x^2+215x-5033=0$.

方程有整根 $x=7$，[1] 于是得上宽 7 丈，下宽 9 丈，上长10丈，下长14丈，高18丈.

这几个不寻常的三次方程，到了宋、元两代，发展成为闻名全世界的高次方程解法——天元术.

第四节 《数术记遗》

《数术记遗》相传是汉末徐岳所作.[2] 曾一度失传，现在

[1] 另有两个虚根 $x=-12\pm\frac{1}{3}\sqrt{861}\,i$，当时未知.

[2] 《旧唐书·经籍志》："《数术记遗》徐岳撰，甄鸾注."钱宝琮认为它是北周甄鸾依托伪造的书．见钱宝琮点校《算经十书》（1963）《数术记遗提要》．

所传的本子是宋嘉定五年（1212）鲍澣(同浣)之在杭州七宝山三茅宁寿观中发现的。[1]

徐岳字公河，东莱（今山东掖县)人，汉灵帝(168—188)时，从刘洪（约160—200）学历算．刘洪对他说："吾曾游天目山中，见有隐者，世莫知其名，号曰天目先生。……先生曰：隶首（相传是黄帝时人，这里指上古的时候）注术，乃有多种，及余遗忘，记忆数事而已．"徐岳就把刘洪所引天目先生的话，记载下来，成为《数术记遗》．

天目先生所记得的是：积算、太乙、两仪、三才、五行、八卦、九宫、运筹、了知、成数、把头、龟算、珠算、计数共14种。这些名称是指一些计算器械的用法．原书对每一种算法只给出几个字的说明（"积算"完全没有说明）．后来甄鸾添上一些注释，仍然不够详细．日本三上义夫曾作过种种推测．[2]

"积算"就是普通的筹算．"珠算"可能就是后世珠算的起源．注中的描述，和现代的算盘非常相象：[3]

"位各五珠，上一珠与下四珠色别．其上别色之珠当五．其下四珠，珠各当一。"

现在的算盘每一档有七珠，上珠一个当五，下珠一个当一．实际上梁上、梁下各减一珠，同样可以进行计算．这样就和《数术记遗》所描写的相仿．

《数术记遗》的记事说明我国古代有种种记数及计算器械，为其他各国所未见．特别是筹算和珠算，在我国历史上扮演

---

〔1〕鲍澣之《数术记遗序》(1212)．

〔2〕三上义夫《中国算学之特色》，林科棠译(1929)第十二章．

〔3〕李约瑟《中国科学技术史》译本卷三 p.168．

着重要的角色.

内塞尔曼(G.H.F.Nesselmann)[1]根据符号使用的情况，将代数学分为三类：（1）文词代数（Rhetorical algebras），完全用文字来叙述而不用符号；（2）简字代数（Syncopated algebras）；（3）符号代数（Symbolic algebras），除了个别地方，一切全用符号表示．我国历来使用算筹计算，单从筹码的布算来看，很象第三类，但从术文来看，只能归入第一类．实际上都不甚恰当，不如另立一类，叫做算器代数（Instrumental algebras）．不但可以包括中国古代代数学，也可以包括近代计算机的算法．[2]

〔1〕G.H.F.Nesselmann, Die Algebra der Griechen (1842) pp.301—306.

〔2〕此说为钱宝琮所首先提倡，见《中国算学史》(1932) p.115.

第十六章　祖冲之、祖暅、刘焯、一行

第一节　祖冲之

祖冲之的巨著《缀术》已经失传，他的数学成果在旁的书只有零碎的、片断的记载. 但仅凭这些点滴的记载，也足以使祖冲之之名永垂史册. [1]

祖冲之字文远，范阳遒（qiú）人[2]. 公元429年（刘宋文帝元嘉六年）生，公元 500 年（南齐东昏侯永元二年）卒. 那时正是中国十分动乱的南北朝时代. 祖冲之的原籍虽然在北方，但几代祖先都在南方做官，而且一家有几代研究历法. 祖父掌管土木建筑，也懂得一些科学技术. 所以祖冲之从小就有机会接触家传的科学知识. 他在少年时代就钻研古代的经典，思想机

---

〔1〕1959年10月 4 日苏联发射第三个宇宙火箭，揭露了月球背面的秘密，苏联科学院将月球背面的一个寰形山定名为“祖冲之”. 伟大的中国数学巨匠，将与日月同辉. 《人民日报》(1960.3.20).

〔2〕唐李延寿《南史》卷七十二：“祖冲之，字文远，范阳遒人.”按臧励和等编《中国古今地名大辞典》(1930) pp.666,854，范阳县是秦时的地名，隋改为遒，在今河北定兴县南40里（另一说在涞水县或易县北）. 又梁萧子显《南齐书》卷五十二：“祖冲之，字文远，范阳蓟人.” 蓟县也是秦的地名，在今河北大兴县（北京南）西南（《中国古今地名大辞典》p.1296）. 不知哪一种说法较准确. 祖冲之生长在南方，和籍贯没有多大关系，且这几个地方相去不远，现姑取第一说.

敏，勤奋好学，终于成为一个伟大的科学家。[1]

祖冲之一方面博览群籍，吸取各家精华；同时又不因循古法，墨守成规。他反对迷信权威，主张通过实践去检验真理。

我国古代的数学和历法，由于时代的限制，有时也沾染种种封建迷信的色彩，术数家宁愿牺牲实测的数据，去凑合阴阳、五行、乐律、易数等理论，妨碍了科学的发展。但是也有一些科学家，突破了天命观、神秘主义的桎梏，吸取实践的精华，丰富自己的理论，又在理论的指导下进行实践。祖冲之是这方面最卓越的代表，他可以和希腊的阿基米德相比，他们都崇尚抽象的理论，同时又注重理论的应用。

祖冲之的杰出成就，主要在天文历法、机械和数学三方面。

祖冲之对历法有很深的造诣，他发现当时通行的何承天（370—440）《元嘉历》（445年开始实行）有三个重大的错误，因此自己制定一种新的历法。以制成的年代命名为《大明历》。祖冲之指出，旧历法使用十九年七闰的闰法[2]不够精密。于是

〔1〕祖冲之的传记见《南齐书》卷五十二，《南史》卷七十二，《宋书》卷十三，《畴人传》卷八等．近人介绍祖冲之的多不胜数．如（1）李俨《祖冲之》，载《科学大众》（1956.9）pp.417—419．（2）周清澍《我国古代伟大的科学家——祖冲之》，载《中国科学技术发明和科学技术人物论集》（1955）pp.270—287．（3）李迪《大科学家祖冲之》（1959）．（4）杜石然《祖冲之》，载《中国古代科学家》（1963）pp.61—72．（5）许莼舫《中国伟大的科学家——祖冲之》，载《科学大众》（1953.5）pp.158—159．（6）曹增祥《祖冲之》（1963）．（7）舒群《伟大的进步科学家祖冲之》，载《数学的实践与认识》（1974）4期pp.1—6．等等．

〔2〕希腊默冬（Meton，Μέτων）在公元前433年引入这种19年7闰的办法，来调和阳历和阴历，一般叫做默冬章（metonic cycle）．但在我国，春秋中叶就已发现，比默冬早一百六七十年．见陈遵妫《中国古代天文学简史》（1955）p.20．

打破常规，采用391年144闰的闰法.[1]这在当时是一项重大的革新. 另一项革新是破天荒将“岁差”引入历法中，开辟了历法史的新纪元.

除了这两大改革外，还有三项新的规定. 宋大明六年(462)，祖冲之上表给宋孝武帝刘骏，建议用《大明历》. 这样优良的历法，理应受到赞扬. 可是皇帝不懂历法，叫大家讨论一下. 当时懂得历法的就不多，兼之新历法理论严密，没有人能提出意见. 唯有“太子旅贲中郎将”（官名）戴法兴，是一个很有权势的人物，稍稍懂得一点历法，但思想非常顽固保守. 他起来反对新历法，极尽挖苦打击之能事. 然而所持论点，完全是无稽谰言.

尽管戴法兴百般诋毁，然而事实胜于雄辩. 祖冲之指出从元嘉十三年（436）到大明三年（459）间的四次月食，和他自己预测的丝毫不差，而戴法兴的预测竟差到十度之多. 在确凿

---

〔1〕现代天文学所定的“岁实”（回归年的日数）：365.2421988，“朔策”（一个朔望月的日数）：29.5305882. 祖冲之的闰法：391年加144个闰月共4836个月.

$$29.5305882\times4836=142809.924535,$$

$$365.2421988\times391=142809.699731.$$

一个周期才差0.2248天，即1739年才差一天，比古法精密得多（后者220年差一天）.

如将岁实与朔策的比化为连分数得

$\frac{365.2\cdots}{29.5\cdots}=12+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{17}+\frac{1}{3}+\cdots$. 各渐近分数是 $\frac{12}{1}$，$\frac{25}{2}$，$\frac{37}{3}$，$\frac{99}{8}$，$\frac{136}{11}$，$\frac{235}{19}$，$\frac{4131}{334}$，$\frac{12628}{1021}$，…. 其中 $\frac{235}{19}$ 就是19年含235个月即19年7闰法，下一个渐近分数是 $\frac{4131}{334}$，即在334年中加123个闰月，这种闰法比祖冲之更好，9669年才差一天！一个周期是334年，比祖冲之的简单. 不过后者在当时还是很了不起的.

的证据下，戴法兴还要强词夺理，反复坚持他古历不可改的谬论。

祖冲之又用“天体运行的规律，不是什么神怪的、不可捉摸的东西，有形体可供观察考验，有数据可以计算推测”[1]的道理去驳斥戴法兴迂腐的“非凡夫所测”的不可知论。从这里也可以看到祖冲之具有朴素唯物论的思想，他肯定客观规律的存在，并且可以根据观测数据用数学推算出来。

戴法兴已经被驳得体无完肤，可是“法兴为世祖（宋孝武帝刘骏）所宠，天下畏其权，既立异议，论者皆附之”。竟没有人敢反对他的意见。[2]

直到梁武帝（萧衍）天监九年（公元510年），在祖冲之儿子祖暅的再三推荐下，才开始施行《大明历》，这已在祖冲之去世后10年，上表论历之后48年了。《大明历》使用到陈后主（陈叔宝）祯明三年（公元589年），共通行80年。

祖冲之在天文方面还有很多贡献。他首次精密测出交点月（太阳两次经过白道升交点的时间）等于27.21223日，和现在公认的27.21222日相差还不到一秒钟。[3]

我国古代用岁星(木星)纪年，因为岁星约12年一周天，于是把黄道分为12等分（每一分叫一“次”），给定12个名称，以岁星所在的位置作为岁名。实际上木星的恒星周期（公转周期）不恰好是12年。《三统历》(公元前7年)认为144年超过

〔1〕原话是：“迟疾之率，非出神怪，有形可验，有数可推。”

〔2〕戴法兴一贯横行霸道，为非作歹，贪赃枉法，到前废帝（465）时被“赐死”。《南史》卷七十七。

〔3〕《宋书》卷十三《志》记载：“会周七十一万七千七百七十七，通法二万六千三百七十七。” 717777（会周）÷26377（通法）=27.21223。

一次（即144年行145次）．这相当定岁星周期为$12\times\frac{144}{145}=11.92$年．[1]祖冲之认为不够精密，指出木星“行天七匝，辄超一位”．一匝指12年，七匝是84年，超一位就是超过一“次”，即84年间共行85“次”．相当于以$12\times\frac{84}{85}=11.859$年作为木星的恒星周期，和现今的测定只有0.026%的误差．其他天文方面的成就不一一列举．

指南车是我国古代的卓越发明，它和利用磁性的“司南”（指南针）不同，是一种装有机械的车，上面有一个木人，无论车怎样行走转动，木人的手总指向南方．

宋昇明（477—479）中，萧道成（后篡位为齐高帝）为相，请祖冲之按古法制造一个．祖冲之改用铜机，无论怎样转动，所指的方向不变．

此外，祖冲之还有水碓磨、千里船等多种机械创造．他又懂得音乐，写过小说，注过多种经典，是历史上少有的博学多才的人物．

祖冲之的数学著作已失传，好在《隋书》还留下一小段关于圆周率的记载．圆周率的发展，在某种程度上反映一个时代或一个民族的数学水平．

唐魏征（580—643）等撰《隋书》卷十六《律历志》十一：

“古之九数，圆周率三，圆径率一，其术疏舛．自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷．[2]宋

〔1〕比现今测定的值11.862年多0.49%．

〔2〕都没有达到精确的地步．调节过与不及叫“折衷”，指精确的数值

末，南徐州从事史祖冲之更开[1]密法．以圆径一亿为一丈，[2]圆周盈数[3]三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽；朒数[4]三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽．正数[5]在盈朒之间．密率：圆径一百一十三，圆周三百五十五．约率：圆径七，周二十二．又设开差幂，开差立，兼以正圆参之．指要[6]精密，算氏之最者也．[7]所著之书，名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理．”

我国径一周三的古率，到刘歆（公元前50？—公元23年）开始有所改变．他是汉代的历法家．王莽（公元前45—公元23年）命刘歆作铜斛（hú，量器），刘歆所用的圆周率，可以从铜斛的铭文（公元9年作成）推算出来．

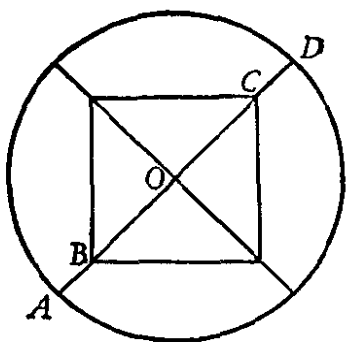


图 43

《隋书》卷十六《律历志》：“律嘉量斛[8]，方尺而圆其外，庣旁九厘五毫，幂百六十二寸．深尺，积一千六百二十寸．容十斗”．

法定的完善标准量器是圆柱形，横截面是在边长1尺的正方形外面有一圆（图43）．庣[9]旁是半

〔1〕开：开创、设置．

〔2〕分直径一丈为一亿等分．古时未有小数记法，为了使所得数值是整数，将直径设为一亿．

〔3〕圆周过剩近似值．

〔4〕不足近似值。朒音nǜ，不足．

〔5〕正确数值，即真值．

〔6〕要旨．

〔7〕数学家之中是首屈一指的了．

〔8〕斛音hú，量器名．

〔9〕庣音tiāo．

径OD减去OC剩下的线段CD. $CD=0.095$（寸）. 故半径$OD=OC+CD=5\sqrt{2}+0.095$（寸）.

又已知面积是162方寸，故

$$\pi r^2=\pi(5\sqrt{2}+0.095)^2=162\text{（方寸）},$$

由此知 $\pi=3.15466\cdots$.

数值虽不够精密，但这是寻求新率的先导，有一定的意义。

张衡（公元78—139年）是后汉的大科学家.[1] 刘徽注《九章》、《少广》章"开立圆"，曾提到张衡圆周率. 经清李潢的考证，认为张衡用的是$\pi=\sqrt{10}=3.162$（"周率一十之面，开方除之，得三·一六有奇."）. 又唐《开元占经》记载张衡用过$\pi=\frac{92}{29}$（$=3.1724$）[2].

王蕃（公元228—266年）是三国时的天算家，用圆周率$\pi=\frac{142}{45}=3.1\dot{5}$（《三國志·吴志》第二十）.

皮延宗（公元440年左右）的圆周率已失传.

从刘歆到皮延宗，几百年来这些数学家都推求过圆周率，其中以刘徽成绩最大. 可是祖冲之还嫌不够精密，进一步去探求更佳的值.

从《隋书》的记载，知道祖冲之求得：

$$3.1415926<\pi<3.1415927,$$

$$\text{密率：}\pi=\frac{355}{113},\quad\text{约率：}\pi=\frac{22}{7}.$$

---

〔1〕传记见赖家度《张衡》(1956).

〔2〕李俨《中国数学大纲》（上）(1958) p.34.

约率早已为阿基米德所知，然而密率却是一件空前的杰作。$\frac{355}{113}$是一个很有趣的数字，分母分子恰好是三个最小奇数的重复，很便于记忆。

$\frac{355}{113}=3+\frac{4^2}{7^2+8^2}$也是很巧妙的配合。1849年，盖尔德（Jakob de Gelder）利用这一关系给出相当精确的π的近似作图法。[1] $\frac{355}{113}=3.141592920\cdots$，相对误差是$9/10^8$，设直径为10公里，用此圆周率算出的圆周只比真值大不到3毫米！

后来印度数学家拉曼纽扬（Srinivasa Ramanujan，1887.12.22—1920.4.26，近代著名数学家，在解析数论等方面有很多贡献）利用近似公式

$$\pi=\left(9^2+\frac{19^2}{22}\right)^{1/4}=3.14159265258\cdots,$$

给出误差更小的几何作图法，直径1000公里，圆周误差仅1毫米！[2]

1853年英国贤可士（William Shanks，1812—1882）算出$\frac{355}{113}=3.\dot{1}4159292035398230088\cdots663716\dot{8}$，是有112位循环节的循环小数。[3] 到1874年贤可士将π算到小数后707位，本世纪40年代有人发现正确的只有小数后527位，第528位应该是4，贤可士误为5．后来经过电子计算机验证，确实如此。

---

〔1〕E.W.Hobson, Squaring the Cirele (1913) p.34.

〔2〕李志昌《求π值的几种圆周的古典近似作图法》，载《数学教学》(1957.9) p.3.

〔3〕小坂正行《世界数学史》(1955) p.186.

为了进一步了解密率的重要意义，还要作一些推算．将 π 展开成连分数：

$$\pi = 3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{292}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}$$

$$+\frac{1}{1}+\frac{1}{14}+\frac{1}{2}+\cdots$$

开头 7 个渐近分数是：[1]

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{208341}{66317},$$

密率是第 4 个，记作 $a_4=\dfrac{355}{113}$，它是最佳分数，第 5 个渐近分数 $a_5=\dfrac{103993}{33102}$ 当然也是最佳分数．[2]

再进一步追问，a_4 与 a_5 之间还有没有最佳分数？答案是肯定的．根据有理逼近理论，可以算出 a_4 与 a_5 之间还有一百多个最佳分数：

$$\frac{355\,l+333}{113\,l+106}\quad(146\leqslant l\leqslant 292)$$

头几个是 $\dfrac{52163}{16604},\ \dfrac{52518}{16717},\ \dfrac{52873}{16830},\ \cdots$

其中分母最小的一个是

---

〔1〕设有无理数 α，展成连分数后，便得到一串的渐近分数．任何一个渐近分数 P/Q 都具有这样的性质：在分母不大于 Q 的一切分数中，P/Q 最接近 α．换句话说，要想找一个比 P/Q 更接近 α 的分数，除非允许分母大于 Q，否则是不可能的．就这个意义说，P/Q 称为最佳分数（指分母不超过 Q 的一切分数中它是最佳的，不是说在一切分数中它最佳）．参考华罗庚《从祖冲之的圆周率谈起》（1963）．又华罗庚《数论导引》（1957）p. 271．

〔2〕渐近分数必定是最佳分数，但最佳分数不一定是渐近分数．

$$\frac{52163}{16604}=3.141592387376\cdots$$

误差为 -0.000000266213，是不足近似值。而

$$\frac{355}{113}=3.14159292035\cdots$$

误差为 $+0.000000266764$，稍大于前者（指绝对值）。

应注意在$\frac{355}{113}$与$\frac{52163}{16604}$之间不再有最佳分数，因此可以肯定地说，在分母小于16604的一切分数中，不可能有比355/113更接近π的分数！

$\frac{355}{113}$在欧洲通常叫做安托尼兹（Adriaen Anthonisz 或 Anthoniszoon，1527—1607）率。[1]他是荷兰的工程师，这发现约在1585年以后。他的儿子梅替斯（Adriaen Metius，1571—1635）在1625年将它发表，并说明他父亲先用阿基米德的方法求出$\frac{333}{106}<\pi<\frac{377}{120}$，然后取二者分子、分母的平均值，得到$\frac{355}{113}$。[2]

后来经过德国人库茨(Maximilian Curtze，1837—1903)的研究，才知道鄂图在1573年已经发现。[3]鄂图是德国马格德

---

〔1〕D.E.Smith《圆周率π之历史及其超绝性》，郑太朴译（1930）p. 113.

〔2〕E.W.Hobson(1856—1933),"Squaring the Circle", A History of the Problem (1913) p. 26.

〔3〕Eneström, Bibliotheca Mathematica, 3S., vol. 13 (1913) p. 264.

堡(Magdeburg，今属东德)人，他可能是从阿基米德的$\frac{22}{7}$和托勒密（Ptolemy）的$\frac{377}{120}$两者折衷而得。[1]

祖冲之求得密率是在上表论历（462)之前。因为在表里说过“汉时解铭，刘歆诡谬其数”的话。可见在那时已研究圆周率。又《隋书·律历志》说：“宋（420—479)末，南徐州从事史祖冲之更开密法。”祖冲之开密法时还是从事史（刺史下的小职员），上历以后，就“出为娄县（今江苏松江县，上海西南）令（地方官），谒者仆射等官。可知圆周率不晚于历法的完成。无论如何，总早于鄂图1100年以上！至于8位精确的圆周率，到1427年左右才被中亚细亚的阿尔·卡西所超过。

为纪念祖冲之首创之功，日本数学史家三上义夫（Yoshio Mikami）在《中日数学发展史》（The Development of Mathematics in China and Japan, 1913）中建议把$\pi=\frac{355}{113}$叫做“祖率”。[2]这种叫法在解放后已通行于全国。

祖冲之8位精确的圆周率一般推测是用了刘徽的割圆术。[3]至于密率的求得，有几种不同的意见。

1. 得自“调日法”。

我国古代遇到奇零不尽的数，习惯上用分数来近似表示，

---

〔1〕本书第七章第四节。p.191。

〔2〕在这本书 p. 50称之为“π的祖冲之分数值”（Tsu Ch'ung-chih's fractional value of π.”后来在《中国算学之特色》，林科棠译（1929)p.37称为“祖率”。

〔3〕清梅文鼎《三角法举要》卷一，补遗二。《数理精蕴》下编（1723）卷十五《割圆》等都这样主张。

如果知道一个是过剩近似（叫“强率”）$\frac{c}{d}$，一个是不足近似（叫“弱率”）$\frac{a}{b}$，那么调和折衷一下，就可以得到更精确的近似值. 方法是将分子分母各相加：

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$

这公式可以继续使用多次，它首先用在历法的“日法”上，所以叫“调日法”.

假定以徽率$3.14=\frac{157}{50}$为弱率，$\frac{22}{7}$为强率，连用“调日法”9次，得

$$\frac{157+22\times 9}{50+7\times 9}=\frac{355}{113}\text{[1]}.$$

2. 得自连分数法.

约率和密率恰好是连分数的两个渐近分数，这不是偶然的. 祖冲之可能用类似连分数的方法推得.[2] 他取第 2 和第 4 个渐近分数可以这样解释：第 5 个有10位可靠数字，当时还未求到，况且太复杂不便于记忆和计算. 第 3 个$\frac{333}{106}$复杂程度差不多，但误差（0.00008322）是第 4 个误差(0.0000002668)的 312 倍. 当然取第 4 个为佳.

---

〔1〕钱宝琮《中国数学史》(1964) p.88. 又李俨《中算史论丛》(一)(1954) p.171.

〔2〕华罗庚《旧珍宝,新光芒》,载《教师月报》(1951.4) 第2期24页：“当然如果说祖冲之已经完全知道渐近分数的理论，那是穿凿附会，但无疑地他是知道其中重要的纲领.”

3．得自不定方程或求一术.

祖冲之已经知道$\pi<\frac{157}{50}$，设$\frac{x}{y}$是略大于$\frac{157}{50}$的分数，则$50x>157y$．又假定$50x=157y+1$，解此不定方程得$x=22+157t$，$y=7+50t$（t 是任意整数），最小的正整数解是 $x=22$，$y=7$．[1]

同理，$\frac{3927}{1250}=3.1416>\pi$，设$\frac{x}{y}<\frac{3927}{1250}$，$1250x<3927y$，又设 $3927y=1250x+1$，解之得 $x=355+3927t$，$y=113+1250t$，$x=355$，$y=113$是最小正整数解．[2]于是有$\frac{x}{y}=\frac{355}{113}$.

以上三种说法并不矛盾．因为三者的道理是相通的．调日法可化为不定方程，不定方程又可用连分数或求一术去解．用连分数解，无非是略去后面的项，用较简的分数来作近似值．

试将徽率化为连分数

$$\frac{157}{50}=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{7}.$$

略去最后一项取其近似值，得$\pi=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$.

同理，

$$\frac{3927}{1250}=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{16+}\frac{1}{11}.$$

略去最后一项，得近似值

〔1〕钱宝琮《古算考源》(1930) p.47.

〔2〕孙炽甫《中国古代数学家关于圆周率研究的成就》，载《数学通报》(1955.5) p.11.

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = \frac{355}{113}.$$

这似乎比连用 9 次调日法或列不定方程更为简捷. 也许祖冲之先用这种方法修正徽率3.14及3.1416, 得到$\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$后, 再拿来和他的盈、朒二数比较, 发觉非常密合, 于是采用为约、密二率. 这也是合乎情理的.

如果把调日法变通一下, 还可以找到另一种途径. 仍用$\frac{157}{50}$作弱率, $\frac{22}{7}$作强率, 设累用调日法得一分数

$\frac{157x + 22y}{50x + 7y} \approx 3.1415926$, 化简后得

$$\frac{y}{x} \approx 8.996.$$

取$y = 9$, $x = 1$, 即得$\frac{157 + 22 \times 9}{50 + 7 \times 9} = \frac{355}{113}$. 这就省得每次用调日法都要核算其误差了.

《隋书》的记载除了圆周率外, 还有"又设开差幂, 开差立, 兼以正圆参之"这几句话. 钱宝琮认为"开差幂"就是开平方术,[1] "差"字的解释是长短有差的矩形, 设一边是 x, 一边是$x + a$, 面积(幂)是A, $x(x + a) = A$ 相当于解二次方程. "开差立"是开长、宽、高有差的长方体, 相当于解三次方程 $x(x + a)(x + b) = V$.

王孝通说祖暅之"《缀术》……方邑进行之术, 全错不通.

〔1〕钱宝琮《中国数学史》(1964) p.89.

刍甍、方亭之问于理未尽”．[1]前一句指二次方程例题，后一句指三次方程例题．王孝通觉得解法不完善，予以补充，这就是《缉古算经》的主要内容．“兼以正圆参之”，圆和员是相通的，钱宝琮认为员是负之误．原句应为“兼以正负参之”．意思是解方程时须参以正负术．这样文意就很清楚了．开差幂过去已知，但开差立确是祖冲之父子所创，尽管王孝通加以指摘，然而饮水思源，祖冲之之功不可忘！

《缀术》究竟是祖冲之所作，还是祖暅所作，各书记载不一．大概是祖冲之完成其主要部分，祖暅后来再编整补充．唐时规定各算书的学习年限，以《缀术》最长（四年），其博大精深由此可见．可惜“学官莫能究其深奥，是故废而不理”，后来竟在十一世纪失传，这是我国学术界的重大损失．

第二节　祖　　暅

祖暅（音gèng）[2]是祖冲之的儿子，字景烁，生卒年代无可考．也是博学多才的数学家．梁天监三年（504），八年（509），九年（510）三次上书建议采用祖冲之的《大明历》，终于实现了父亲的遗愿．

祖暅的主要工作是修补编辑祖冲之的《缀术》．他推导球体

〔1〕见本书第十五章三节．p．383．

〔2〕也作祖暅之、祖亘．他的名字有无“之”字，说法不一．大概是有没有都可以．正象胡适也叫胡适之一样．他的祖先有的有之，有的无之．曾曾祖祖台之，曾祖祖昌，祖祖朔之，父祖冲之，子祖皓，孙祖法敏．参考钱宝琮《祖暅和他的缀术》，载《数学通报》（1954.3）p.12．

积公式的方法非常巧妙.[1] 唐李淳风注《九章》（656）时，引用了祖暅的开立圆术，即根据球体积求直径的方法，使祖暅的学问得以流传下来.[2]

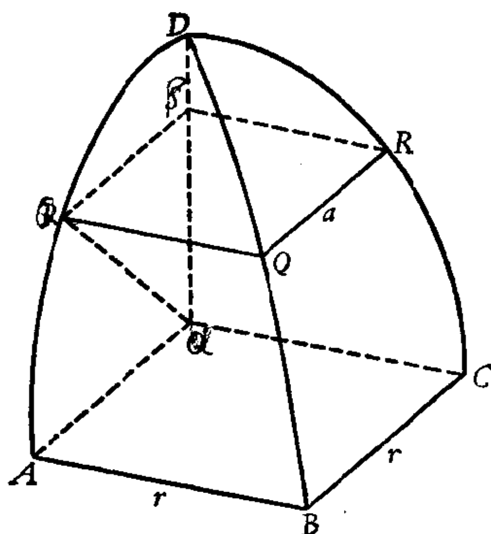


图 44

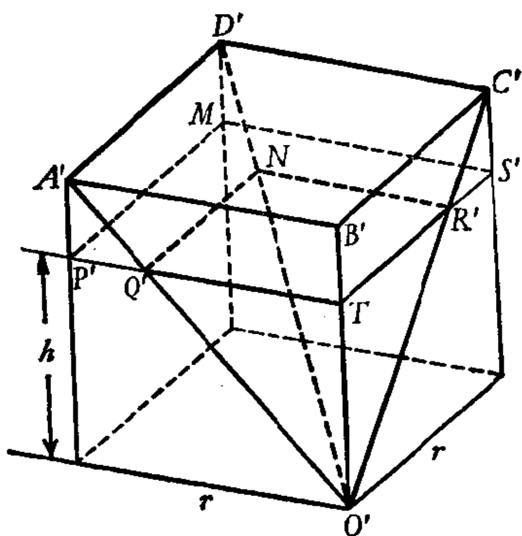


图 45

为了便于理解，我们用现代的术语，又将原来的图形略加修改，说明如下.

作一个立体V_1（V_1同时表示其体积，下同）底 $OABC$ 是正方形，边长为 r（图44）.高 $OD=r$且⊥底面，$\overset{\frown}{DRC}$，$\overset{\frown}{DPA}$ 都是以 r 为半径圆周的$\frac{1}{4}$. 又平行于底的任意平面与立体的截面 $PQRS$ 都是正方形，记边长为 a. 设 $OS=h$，则截面积 $a^2=r^2-h^2$.

另取一个边长为 r 的立方体 V_2（图 45），联 $O'A'$，$O'D'$，$O'C'$. 锥体 $O'A'B'C'D'$ 记作 V_3. V_2-V_3 是立方体减去锥体剩下的立体. 下面证明 $V_1=V_2-V_3$.

---

〔1〕参考：(1)杜石然《祖暅之公理》，载《数学通报》(1954.3) pp. 9—11. (2)钱宝琮《中国数学史话》(1957) pp.84—87. (3)李俨《中国数学大纲》(上)(1958) pp.70—73.

〔2〕本书第十四章第四节. p. 352.

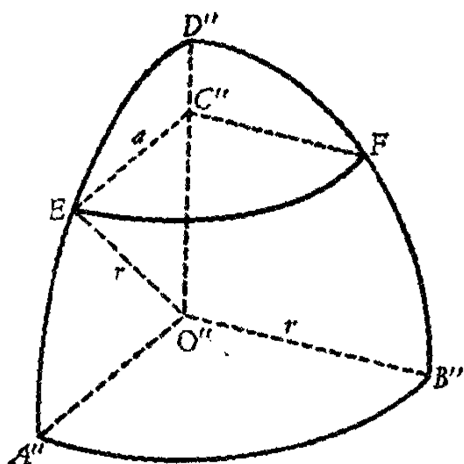


图 46

在高 h 处作平行于底的平面，与 V_2 的截面是正方形 $P'TS'M=r^2$，与 V_3 的截面是正方形 $Q'TR'N=h^2$（因 $Q'T=O'T=h$）. 故磬折形（gnomon，即二正方形的差曲尺形 $P'Q'NR'S'M$）的面积为 r^2-h^2.

比较 V_1 与 V_2-V_3，在同高（h）处的截面积都是 r^2-h^2，高度又相同. 因此体积也相同，即 $V_1=V_2-V_3$.

原文是"幂势既同，则积不容异"."幂"是截面积，"势"是立体的高. 意思是：二同高的立体，如在等高处的截面积恒相等，则体积相等. 更详细一点说是：界于二平行平面之间的两个立体，被任一平行于这二平面的平面所截，如果两个截面的面积常相等，则这两个立体的体积相等.[1]

由此知 $V_1=V_2-V_3=r^3-\frac{1}{3}r^3=\frac{2}{3}r^3$.

再来看以 r 为半径的球，取其 $\frac{1}{8}$（第一卦限）（图46），设体积为 V_4，它是未知的. 和 V_1 比较，在高 h 处的截面积 $C''EF$ 是以 a 为半径的圆的 $\frac{1}{4}$，面积是 $\frac{\pi}{4}a^2=\frac{\pi}{4}(r^2-h^2)$.
而 V_1 在同高处的截面积是 r^2-h^2. $V_4:V_1$ 应该等于截面积的比，即 $V_4:V_1=\frac{\pi}{4}(r^2-h^2):(r^2-h^2)=\frac{\pi}{4}$，于是

[1] 后一种说法是52个字，古代数学家用9个字就表达出来了. 如改成"幂势同则积同"字数更少.

$$V_4=\frac{\pi}{4}V_1=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}r^3=\frac{\pi}{6}r^3.$$

整个球的体积是$\frac{4}{3}\pi r^3$. 这是多么简洁明晰的证法!

再以 $d=\frac{r}{2}$代入得 $V=\frac{\pi}{6}d^3$, 解出 d, 以$\frac{22}{7}$代 π, 即得祖暅开立圆术公式

$$d=\sqrt[3]{\frac{21V}{11}}.$$

祖暅提出"幂势既同,……",又"体积之比等于对应截面积之比", 相当于积分式

设 $f(x)=g(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)dx$$

及 $$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx.$$

这里他当作公理使用. 第一种提法("幂势既同, 则积不容异")在西方通常叫做"卡瓦列利原理" (Cavalierisches Prinzip). [1]卡瓦列利[2]在他的名著《连续不可分几何》中提出这一原理, 这书1635年在波伦亚 (Bologna) 出版. 可能1629年他已经知道这一原理. [3]

祖冲之上《大明历》(462) 时说:"至若立员旧误,张衡述而弗改. ……臣昔以暇日, 撰正众谬. "可以断定祖冲之那时

〔1〕J.Naas, H.L.Schmid, Mathematisches Wörterbuch (1962) p. 251. 也称"卡瓦列利定理"(Cavalieri's Theorem), G. James, R. C.James, Mathematics Dictionary (1959) p. 44.

〔2〕见本书第十章第二节 p.246.

〔3〕D.E.Smith, History of Mathematics (1923) p.362.

已经求得"立圆（员）"（球）体积的正确公式，也许祖暅再详加研究，加以补充阐发．不管怎样，总早于卡瓦列利1100年以上！所以这一原理应改称为"祖氏原理"，以纪念祖冲之父子．其内容应包括"幂势既同，则积不容异"以及"体积比等于截面积比（设此比为常数）"．

第三节　刘焯、一行

中国古代数学和历法的关系特别密切，不懂历法的数学家很少．许多数学的新发明或者因历法的需要而引起，或者首先应用到历法上去．最典型的例子是大衍求一术和刘焯、一行等人的内插法．[1]

刘焯（544—610）字士元，信都昌亭（今河北省冀县）人．著《皇极历》，在隋文帝开皇二十年（600），仁寿元年（601），四年（604）曾上书论历，都没有被采用，但确受到相当重视．《隋书》卷十八《律历志》存录了他的历法．在这里刘焯发现了等间距二次内插法公式．

设函数 $f(x)$ 的自变量 x 依次取 a，$a+h$，$a+2h$，…各值，则对应的函数值是 $f(a)$，$f(a+h)$，$f(a+2h)$，…．命

$\triangle f(a)=f(a+h)-f(a)$，$\triangle f(a+h)=f(a+2h)-f(a+h)$，

$\triangle f(a+2h)=f(a+3h)-f(a+2h)$，…叫做一阶差分；

$\triangle^2 f(a)=\triangle f(a+h)-\triangle f(a)$，$\triangle^2 f(a+h)=\triangle f(a+2h)$

〔1〕严敦杰《中算家的招差术》，载《数学通报》（1955.1）pp.4—13．
李俨《中算家的内插法研究》（1957）．

$-\triangle f(a+h)$，…叫做二阶差分；$\triangle^3 f(a)=\triangle^2 f(a+h)-\triangle^2 f(a)$，…叫做三阶差分，以此类推．则

$$f(a+nh)=f(a)+n\triangle f(a)+\frac{n(n-1)}{2!}\triangle^2 f(a)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\triangle^k f(a)+\cdots \qquad (1)$$

（其中 n 是任意正数）是有名的"格列哥利—牛顿插值法公式"．

这公式一般归功于牛顿，载在他的《自然哲学之数学原理》第三编第五章§51．[1] 但更早的格列哥利在1670.11．23的书信中已引用这公式．[2]

太阳在黄道上的移动并不是匀速的，如冬至前后靠近近日点，移动得快，夏至前后靠近远日点，移动得慢．6世纪中，北齐河内（今河南沁阳县）人张子信因避战乱隐居在海岛上，花了三十年工夫的观测，才发现了太阳快慢不匀的事实．[3]

刘焯开始在历法中考虑太阳的运行迟速．设已知在某一气[4]（a）的"迟速数"（太阳在黄道上某点移动速度的变化率）$f(a)$，又知道每个节气的"迟速数"〔$f(a)$，$f(a+h)$，$f(a+2h)$，…〕的一阶差 $\triangle f(a)$，$\triangle f(a+h)$，…，二阶差

〔1〕郑太朴中译本（1957）pp.868—871．

〔2〕E.T.Whittaker, G.Robinson,《内插法》（A Shorter Course in Interpolation），裘宗尧译，（1941）p.15．

〔3〕陈遵妫《中国古代天文学简史》（1955）p.116．竺可桢《中国古代在天文学上的伟大贡献》，载《科学通报》（1951）2卷3期．

〔4〕二十四气是我国历法的重要组成部分，一向为人民所重视．一年分为二十四气：十二个节气（清明、立夏、芒种、…、惊蛰），十二个中气（春分、谷雨、小满、…、雨水）．

$\triangle^2 f(a)$，$\triangle^2 f(a+h)$，…，求在两气之间某一日 $a+nh$ 的"迟速数"$f(a+nh)$。在公式（1）中令三阶差$\triangle^3 f(a)=0$，则

$$f(a+nh)=f(a)+n\triangle f(a)+\frac{n(n-1)}{2}\triangle^2 f(a) \qquad (2)$$

记 $\triangle_1=\triangle f(a)$，$\triangle_2=\triangle f(a+h)$，又 $\triangle^2 f(a)=\triangle_2-\triangle_1$，则

$$f(a+nh)=f(a)+n\triangle_1+\frac{n(n-1)}{2}(\triangle_2-\triangle_1),$$

或 $f(a+nh)-f(a)=\dfrac{n(\triangle_1+\triangle_2)}{2}+n(\triangle_1-\triangle_2)-\dfrac{n^2}{2}(\triangle_1-\triangle_2)$.

这是刘焯的计算公式. 仅此一例，便知道刘焯（600）在格列哥利及牛顿之前一千多年已发明二次内插法，实在是了不起的大事情！

后来僧一行在唐开元十二年（724）编《大衍历》，其中"步日躔（chán，太阳在天球上运行）术"把刘焯的内插法推进一步，利用了自变量不等间距二次内插法.

僧一行原名张遂，魏州昌乐（今河南北端与河北交界处的南乐县）人.[1] 生于唐高宗弘道元年（683），卒于唐玄宗开元十五年（727）.

一行除了推广了刘焯的内插法外，还有一项伟大的贡献，就是发动了大规模的测量，实际求出了子午线一度的长.[2]

古代《周髀算经》等书都说南北相去一千里，八尺高的竿

〔1〕传记见《旧唐书》卷一百九十一列传第一百四十一. 一行的威信很高，关于他有种种神话般的传说.

〔2〕梁宗巨《僧一行发起的子午线实测》，载《科学史集刊》第2期（1959.6）pp.144—149. 又陕西天文台《我国古代第一次天文大地测量及其意义》，载《中国天文学史文集》（1978）pp.143—156.

在日中影长相差一寸.[1]这种“寸千里”的说法是不正确的，但人们一直相信这种谬论，没有人用实测去纠正它。直到南朝刘宋元嘉十九年(442)才有人到交州（今越南河内一带）测日影，所得数字与“寸千里”不符．从此人们开始怀疑这一说法．

刘焯主张进行实测，“请一水工，并解算术士（懂得测量和数学的人），……南北使正，审时以漏，平地以绳．……则天地无所匿其形，辰象无所逃其数．”

到607年，隋炀帝下令叫各地测影．可惜不久刘焯死去，这件事就搁置下来．过了一个多世纪，刘焯的建议终于在一行的策划下实现了．

实际执行测量事宜的是南宫说，时间是唐开元十二年(724)．所得结果因地而异．河南浚仪、扶沟两地间地势平坦，成绩较好，得子午线每度长122.8公里．比真值多11公里多．虽不十分精确，但这是世界上第一次子午线实测．

西方实测最早的是814年阿尔·马蒙（al-Mâmûm）领导，代数学家阿尔·花拉子模参与的一次，这已在南宫说之后90年了．

---

〔1〕事实上地是球形，日影的差，并不与两地距离成正比．设观测点的纬度是ϕ，黄赤交角是ϵ（约23°.5），夏至日太阳仰角是$h=90°-|\phi-\epsilon|$，8尺竿影长应为 $b=8\,\mathrm{tg}|\phi-\epsilon|$，$\phi>\epsilon$ 影在竿北，$\phi<\epsilon$影在竿南．

第十七章　宋、元全盛时期

北宋王朝建立（960）以后，结束了唐末五代十国长期割据的混乱局面，社会得到相对的安定。在封建经济高度发展的基础上，我国人民表现出非凡的创造能力。完成了震撼世界的中国古代三大发明——火药、罗盘针和印刷术。[1]

数学方面，继承汉、唐先辈们所创造的成果，出现了空前繁荣的景象。这一时期，涌现出一批划时代的人物：沈括、秦九韶、李冶、杨辉、郭守敬、朱世杰等。他们的工作使天元术飞跃地发展，成绩的突出是史无前例的。那时正值欧洲的中世纪，科学停滞不前，比之我国，真是相形见绌了。

第一节　沈　括

沈括1031年（宋仁宗天圣九年）生，1095年（哲宗绍圣二年）卒，[2]字存中，浙江钱塘（今杭州）人，是这个时代的先

---

〔1〕火药10世纪开始用于军事。11世纪，沈括《梦溪笔谈》已有磁针的记载，磁石的发现则早在战国以前。《梦溪笔谈》又记载了毕升发明（1041—1048年间）活字印刷。有时加上汉代发明的造纸术，合称四大发明。

〔2〕各书的记载不一，生年在1029—1032之间，卒年1093—1096。

驱．他“博学善文，于天文、方志、律历、音乐、医药、卜算，无所不通，皆有所论著”．[1] 他又是物理学家、地理学家、地质学家、外交家和数学家．象他这样多才多艺的全面人才，不但在数学史上没有，在整个世界史上也是罕见的．[2] 1082年因军事失利的牵连被贬谪，晚年（1086—1095）闲居在润州（今江苏镇江）梦溪园[3]，潜心写作．成《梦溪笔谈》（1088左右）等有巨大科学价值的著作．

沈括有多方面的贡献．在历法方面，沈括觉得过去使用阴历，一年有时十二个月，有时十三个月，非常不便．而且月的朔望与寒暑农事毫无关系，不如改行彻底的阳历．他的办法[4]不但比当时的阴历好，[5] 比现行的公历（格里历）也好．现行的公历，月份大小参差不齐，每月日数杂乱无章，季节安排没

〔1〕《宋史》卷三百三十一《沈括》．

〔2〕近人关于沈括的介绍颇多．如（1）张家驹《沈括》（1962）．（2）胡道静《梦溪笔谈校证》（1957）．（3）胡道静《沈括的科学成就的历史环境及其政治倾向》，载《新华半月刊》（1956）7期 pp．154—159．（4）钱君晔《宋代卓越的科学家——沈括》，载《中国科学技术发明和科学技术人物论集》（1955）p.288．（5）钱宝琮《沈括》，载《中国古代科学家》（1963）p.123．（6）李群《〈梦溪笔谈〉选读》（1975）．

〔3〕传说他曾梦游那块地方，故筑室名梦溪园．

〔4〕见沈括《补笔谈》卷二《象数》，根据胡道静《新校正梦溪笔谈》（1957）p.300，或李群《〈梦溪笔谈〉选读》（1975）pp.91—92。

〔5〕我国从汉初实行三统历到现在，共使用过四十多种历法，除太平天国的天历和现今的公历外，全是阴历．现行的“农历”，并不是很早就有的．它从1742年（清乾隆七年）开始实行，是戴进贤（Ignace Kögler，1680-1746，日耳曼人），徐懋德（André Pereira，1690—1743，原籍英国，入葡萄牙籍），明安图（蒙古族人，约生于1692）等人编的《历象考成后编》所订的历法，以雍正元年癸卯（1723）为历元，叫做“癸卯元历”．

有规律，这都是罗马皇帝遗留下来的陋习。[1]但我国数千年来使用阴历（更精确地说是阴阳历），业已深入人心，一时难以改变。沈括不顾世俗的惊异，毅然抛弃前人旧说，勇于创新，有哥白尼、罗巴契夫斯基的大无畏精神。[2]

沈括在数学方面，有独到的见解。他的创作，主要是“隙积术”和“会圆术”。前者是高阶等差数列求和法，后者是关于弓形的计算。

《梦溪笔谈》卷十八《技艺》：

“算术求积尺之法，如刍萌、刍童……之类，物形备矣，独未有‘隙积’一术。……隙积者，谓积之有隙者，如累棋、层坛及酒家积罂之类。”

意思是说，过去有种种求体积的方法，但所指的形体都是实心的。如果把缸、罂、盆之类堆垒成长方台（刍童）的形状，中间是有空隙的，这就不能用刍童的算法求其总数。

沈括的“隙积术”就是后来的“堆垛术”或西方的“积弹

---

〔1〕公元前46年罗马帝儒略·凯撒（Gaius Julius Caesar）改历，原定单月31天，双月30天。这样便有366天，实际一年只有365天多，故从2月（他们认为是不吉利的）扣除一天，成为29天。他规定7月是大月的原因是他生于7月，并以他的名字 Julius 来作为7月的名称（转成英文 July）。后来奥古斯都（Augustus）当了皇帝，又把他出生的8月命名为 Augustus，并改为大月（31天），再从2月抽出一天，这就是2月28天的来历。这样胡乱修改历法，使得日子非常混乱。

〔2〕七百年后，阮元《畴人传》（1799）还以这一点来非议沈括。太平天国冯云山创制的“天历”（1851），和沈括历暗合，大概直接得自沈括。见罗尔纲《天历考及天历与阴阳历日对照表》（1955）。这是我国实行阳历之始。因与过去习惯不合，引起很大的骚动。南京某秀才作诗记其事：“家家锣鼓闹喧阗，贺帖纷纷互拜年，独有一桩堪诧异，今朝初四月团圆。”见高梦旦《十三月新历法》（1933）p.18。甚矣，除旧布新之匪易也。

法”(Piles of Shots)。把许多同样大小的弹丸堆积起来，各层成矩形，每一层比上一层长、宽各多一个。求其总数。

设第一层（最上层）长b个，宽a个，则第二层长、宽各为$b+1$，$a+1$，…第n层（最下层）长、宽各为$B=b+(n-1)$，$A=a+(n-1)$。总数

$$S=ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots+[a+(n-1)][b+(n-1)]$$

$$=ab+[ab+1\cdot(a+b)+1^2]+[ab+2(a+b)+2^2]+\cdots+[ab+(n-1)(a+b)+(n-1)^2]$$

$$=nab+[1+2+\cdots+(n-1)](a+b)+[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2] \quad (1)$$

这归结为求n个自然数的和及n个自然数平方的和。前者为等差级数，前人早已知道，后者则为古书所未道及。设想沈括已求出 $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$，连同

$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$ 一起代入（1）式，有

$$S=nab+\frac{1}{2}n(n-1)(a+b)+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

$$=\frac{n}{6}[6ab+3(n-1)a+3(n-1)b+(n-1)(2n-1)] \quad (2)$$

再用 $n-1=A-a=B-b, 2n-1=2B-2b+1$ 代入（2），

$$S=\frac{n}{6}[6ab+3a(B-b)+3b(A-a)+(A-a)(2B-2b+1)]$$

化简后即得沈括公式[1]

[1] 许莼舫《中国古代的四种级数算法》，载《数学教学》(1956) 1期p.25.

$$S=\frac{n}{6}[a(2b+B)+A(2B+b)]+\frac{n}{6}(A-a) \qquad (3)$$

这种推导法只是一种猜测.

沈括举了一个例子，$a=b=2$，$A=B=12, n=11$. 各层的数目恰好是平方数，总数应该是

$$S=2^2+3^2+\cdots+12^2,$$

如用自然平方和公式，立刻得到

$$S=\frac{1}{6}\cdot 12(12+1)(2\cdot 12+1)-1=649.$$

但沈括没有用这种算法而是用他发明的隙积术公式. 由此可见公式（3）不是从自然数平方和推来的.

《九章算术》早已有长方台的体积公式

$$V=\frac{h}{6}[a(2b+B)+A(2B+b)]^{(1)} \qquad (4)$$

a、b是上底矩形的宽、长，A、B是下底的宽、长，h 是高. 如果将h看作是堆垛的层数n，a、b、A、B看作是上、下底各边的个数，那么(4)式正是（3）式的第一项. 后面再加一项$\frac{n}{6}(A-a)$，便是（3）式.

沈括得到（3）式，可能沿着这样的思想路线：经过多次的测算，知道用长方台公式（4）来算出的数总比实际的数少. 其差额显然与上广(a)、下广(A)或上长(b)、下长（B）及层数(n)有关. 又很多立体体积的算法都有"以高乘之，六而一"（即乘以$\frac{n}{6}$），从而$\frac{n}{6}(A-a)$便不难推出. 再经过多次的实践考验，证明公式是正确的. 虽然沈括未必懂得严格的数学归

〔1〕见本书第十四章第四节p.353.

纳法，然而类似的推想足以使他深信算法的普遍性。[1]

总而言之，隙积术为后面垛积术开辟了道路。影响是深远的。清顾观光（1799—1862）说："堆垛之术详于杨(辉)氏，朱（世杰）氏二书，而创始之功，断推沈（括）氏。"[2]

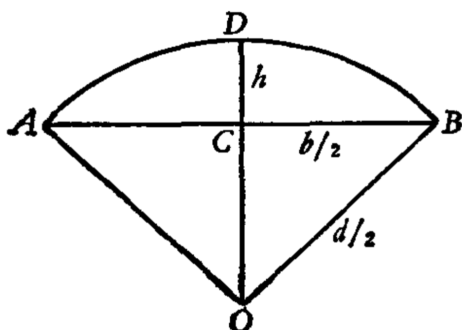


图　47

"会圆术"是已知圆的直径（d）和弓形 $ADBA$ 的高（$CD=h$），求弓形的弧长（$\overset{\frown}{ADB}=s$）和底（$AB=b$）的算法（图47）。

底 b 根据勾股定理立刻得出，

$$AB=b=2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-h\right)^2}.$$

弧$\overset{\frown}{ADB}$的计算公式是　$S=\frac{2h^2}{d}+b.$　(5)

沈括没有说明公式的来源。似乎是根据《九章》的公式推得的。《九章》方田章给出圆面积的计算公式是"半周乘半径"（$\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2$）。如将圆周改成圆周的一部分（弧 S），相应的面积也应该是圆的一部分（扇形 $OADB$），即扇形面积等于$\frac{1}{2}\cdot s\cdot r$ 或$\frac{1}{2}\cdot s\cdot\frac{d}{2}=\frac{1}{4}sd$。另一方面，方田章又给出弓形面

[1] 另一种可能的推导是将(1)式看作一个"层坛"的体积。"层坛"是由 n 个长方体叠起来的阶梯形立体，最上一层是长为a，宽为 b，高为 1 的长方体，其余各层高相同，而长宽各比上一层多 1．比较层坛和长方台，可以导出(3)。见李群《〈梦溪笔谈〉选读》(1975) pp.108—112.

[2] 李俨《中算史论丛》（一）（1954) p.338.

积的近似公式$\frac{1}{2}(bh+h^2)$。

按图47，扇形 OADB＝弓形ADBA＋△OAB，即

$$\frac{1}{4}sd=\frac{1}{2}(bh+h^2)+\frac{1}{2}b\left(\frac{d}{2}-h\right),$$

化简即得（5）式。

扇形面积公式是正确的，但《九章》的弓形面积公式误差很大，因此（5）式的误差也很大。以沈括所给的例来说，$h=2$，$d=10$，$b=8$，$s=8.8$。精确的值是 $s=2.5\text{arc tg}\frac{4}{3}=9.27295$，相对误差达5.1%。因此不是很理想的公式。[1]

第二节 秦九韶

秦九韶字道古，鲁郡（今山东滋阳、曲阜一带）人，18岁时在乡里为义兵首，早年曾从隐君子学数学。父亲季槱，南宋宝庆（1225—1227）中在潼川（今四川三台县）做官，秦九韶随父亲到那里去。淳祐四年（1244）秦九韶在建康府（今江苏江宁县南）做官。淳祐七年（1247）九月，著成《数书九章》十

〔1〕如改用公式$S=\frac{2h}{d}\left(\frac{b}{3}+\frac{h^2}{b}\right)+b$，可以得到精确度很高的近似值，以此例来说，求得$s=9.26$，误差0.0063，如单位为米（直径10米），所得弧长的误差仅有6.3mm。如用更精确的公式

$$S=\frac{2h}{d}\left(\frac{b}{3}+\frac{32h^2}{31b}\right)+b,$$

算得弧长$s=9.27312$，仍以米为单位，弧长误差仅0.17mm！

八卷．后卒于梅州（今广东梅县）．生卒年约为1202—1261．[1]

秦九韶《数书九章》是一部划时代的巨著，内容丰富，精湛绝伦．特别是“大衍求一术”和高次方程解法，在世界数学史上占有崇高的地位．那时是13世纪，西方漫长的黑夜犹未结束，它却象旭日一般在东方发出万丈光芒．

自从《孙子算经》提出了“物不知数”题以后，直到秦九韶才给以理论上的说明，并定名为“大衍求一术”．

“大衍”的问题是找出一个正整数x，使x被M_1除余b_1，被M_2除余b_2，…，被M_s除余 b_s．$M_1, M_2, \cdots, M_s$ 不一定两两互素，个数也没有限制，下面为了便于说明，设为 3 个．

用同余式的记法，所要解的是同余式组：

$x \equiv b_1 (\mathrm{mod} M_1)$，$x \equiv b_2 (\mathrm{mod} M_2)$，$x \equiv b_3 (\mathrm{mod} M_3)$．

经过一定手续（求“定数”）处理后，变换成同余式组

$x \equiv b_1 (\mathrm{mod} m_1)$，$x \equiv b_2 (\mathrm{mod} m_2)$，$x \equiv b_3 (\mathrm{mod} m_3)$，其中$m_1$，$m_2$，$m_3$ 两两互素（“各数俱不同类”）．如果能求出满足下列各同余式的N_1，N_2，N_3，

$N_1 m_2 m_3 \equiv 1 (\mathrm{mod} m_1)$，$N_2 m_1 m_3 \equiv 1 (\mathrm{mod} m_2)$，

$N_3 m_1 m_2 \equiv 1 (\mathrm{mod} m_3)$，

那么所求的数是

$$x \equiv (N_1 m_2 m_3 b_1 + N_2 m_1 m_3 b_2 + N_3 m_1 m_2 b_3) (\mathrm{mod}\ m_1 m_2 m_3).$$

《数书九章》的术语，m_1, m_2, m_3 叫做“定母”；b_1，b_2，b_3 叫做“余数”；$m_1 m_2 m_3$ 叫做“衍母”；$m_2 m_3, m_1 m_3$，$m_1 m_2$叫

[1] 钱宝琮《秦九韶〈数书九章〉研究》，载《宋元数学史论文集》（1966）pp.60—103．李俨《中国算学史》（1955）p.98《秦九韶传》．

做“衍数”；N_1，N_2，N_3 叫做“乘率”。

求出乘率，问题便迎刃而解。秦九韶给出一整套求乘率的方法，这也就是大衍求一术的精髓。[1] 后来清黄宗宪（1874）发现求乘率捷法，和秦九韶的方法没有本质的区别，不同的只是演算时排列的格式。从寻找定母，计算乘率，直到最后求出结果，整个演算过程非常整齐，优美。西方解决这类问题用同余式，它的理论是1801年高斯建立的。已在秦九韶之后554年。

古典代数的中心是方程论，我国在方程论方面有优良的传统。祖冲之父子开始研究二、三次方程，到唐代王孝通三次方程解法得到进一步的发展。宋、元两代更推广到高次方程。

宋刘益在1080年左右著的《议古根源》，现已失传，杨辉《田亩比类乘除捷法》（1275）还有片断的记载。刘益虽然只讨论到二次方程，[2] 但方法已和“霍纳法”相似，可以用到高次方程上去。以杨辉记载的题为例：“直田积（矩形面积）八百六十四步，只云阔不及长一十二步。问阔及长各几步？答：阔二十四步，长三十六步。”

设阔x步，则长$x+12$步，列成方程　$x(x+12)=864$，或$x^2+12x-864=0$。先估计根的第一位数字，容易知道根在20与30之间、经过代换 $x=20+x_1$ 化成辅助方程$x_1{}^2+12x_1+40x_1=224$。再用试除法求出$x_1=4$。于是得答案$x=24$。

〔1〕（1）李俨《大衍求一术的过去和未来》，载《中算史论丛》（一）（1954）pp.122—174。

（2）许莼舫《古算法之新研究》（1935）第二章《求一术》；《古算法之新研究续编》（1945）第二章《求一术之续》。

（3）钱宝琮《中国数学史》（1964）第十一章《大衍求一术及其他》。

（4）李文林、袁向东《中国剩余定理》，载《中国古代科技成就》（1978）。

〔2〕也有个别四次方程．见钱宝琮《增乘开方法的历史发展》，载《科学史集刊》（1959）2期p.132。

演算步骤其实就是现在的综合除法，不同的是将一次项分为两项。[1]

杨辉《详解九章算法纂类》（1261）还记载了已失传的贾宪《黄帝九章细草》（约1200）的某些算法。贾宪化简了刘益的方法，推广到四次方程，更加接近“霍纳法”。

秦九韶《数书九章》总结和巩固了前人的开方法，整齐而有系统地应用到任意次方程的有理或无理根的求解上去。实质上和“霍纳法”完全相同。霍纳在1819年发表其方法，晚于秦九韶572年。鲁非尼类似方法的发表（1804）也晚557年。

秦九韶法可用一个例子来说明。卷六“环田三积”题得出一个 4 次方程

商 〇	
实	-6262506.25
〇 方	0
从上廉	$+15245x^2$
〇 下廉	0
益隅	$-1x^4$

图 48

[1] 李俨《中国算学史》（1955）p.128。

$$-x^4+15245x^2-6262506.25=0 \quad (6)$$

原式的排列见图48. “商”是根，在解方程之前，还未得到根，暂记作0. “实”是常数项，注意“实”的位置相当于小数点. “方”是1次项系数，“从上廉”是2次项系数，“下廉”是3次项系数，“益隅”是最高项（此例是4次项）系数. 系数正负的规则是：“‘商’常为正（根永远是正的），‘实’常为负，‘从’常为正（冠以‘从’字的是正项，如‘从上廉’就表示二次项系数是正的），‘益’常为负（冠以‘益’字的是负项）.”（卷五“尖田求积”题）.

方程（6）共有4个实根：±20.55480479，±121.7476899. 秦九韶只得出一根20.5494853，误差0.026%.

解方程的方法叫做“开玲珑三乘方”. 先用试除法确定根大约是20. 秦九韶所设例题，“实”都是负的，如果用某数试除（综合除法），负实变为正，叫做“换骨”（如卷五“尖田求积”题）. 如果“实”的绝对值比原先的增大，叫做“投胎”（卷八“古池推元”题）. 这两种情形可以作为确定根的位置的标准. 因为以根的近似值试除，“实”应与0接近.

得到根的近似值20以后，作代换 $x=20+x_1$，得辅助方程

$$-x_1^4-80x_1^3+12845x_1^2+577800x_1-324506.25=0. \quad (7)$$

步骤就是综合除法的连续使用. 原书每一步列一个表，实际用筹运算时，算筹可以随时搬动或取出放进，所以从开始到末了，总是在同一个地方进行.

其次，借估计知辅助方程的根在0与1之间，本来可以再作一次代换，但现在 x_1 很小，如略去高次项，（7）变成

$$577800x_1-324506.25=0,$$

立刻就得出x_1的近似值$\frac{324506.25}{577800}=0.56162383$。

秦九韶采用另一种更好的估计法，将高次项全看作一次项，（7）变成

$$-x_1-80x_1+12845x_1+577800x_1-324506.25=0,$$

于是得

$$x_1=\frac{324506.25}{590564}=\frac{1298025}{2362256}$$

$$x=20\frac{1298025}{2362256}=20.5494853。$$

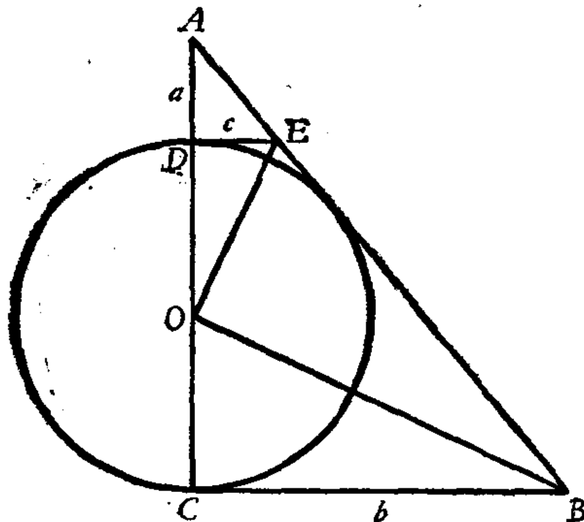


图　49

与真值的差是0.005319，前一种方法的差较大，是0.006819。

《数书九章》有一个方程高达10次。这是卷八“遥度圆城”题：“问有圆城不知周径（CD），四门中开（东、南、西、北各有城门）。北（北门D）外三里有乔木（A），出南门（C）便折东行九里（至B），乃见木（A）。欲知城周径各几何。圆用古法（设 $\pi=3$）。答曰：径九里，周二十七里。”

秦九韶设直径平方根为 x，列成方程

$$x^{10}+15x^8+72x^6-864x^4-11664x^2-34992=0, \qquad (8)$$

然后“开玲珑九乘方”（解10次方程），用综合除法，以 3 为“商”（试除数）“适尽”（恰好除尽），得$x=3$．所求圆径$DC=9$．“又以古法圆率三（$\pi=3$）因之（乘之）得二十七为城周．”

至于为什么要列成10次方程，目前还存在很多疑点．[1] 清沈钦裴《数学九章札记》曾推导过．现详细推演如下(图49)：过D作切线交AB于E，已知$DA=a$，$CB=b$．设$DE=c,CD=d$．因△OCB∽△EDO，DE:OD=CO:CB，故

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2=bc.\text{ 又}\triangle ADE\backsim\triangle ACB,\ a+d:b=a:c,$$

$$c=\frac{ab}{a+d}\text{代入上式}\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{ab^2}{a+d},\text{ 即}$$

$$d^3+ad^2-4ab^2=0 \qquad (9)$$

其实解这个三次方程，便得d．但秦九韶不解这方程，而是设$d=x^2$，将(9)写成 6 次方程，

$$x^6+ax^4-4ab^2=0,$$

两端再乘以$(2a+x^2)^2$，得

$x^{10}+5ax^8+8a^2x^6-4a(b^2-a^2)\ x^4-16a^2b^2x^2-16a^3b^2=0$，以$a=3$，$b=9$代入即得方程（8）．

秦九韶解方程的方法是对任何次方程都适用的，但在实际问题中出现 4 次以上的方程并不多见．为了举一个相当高次的例子，特地造出一个10次方程来，说明解法的普遍性，他是煞

〔1〕李俨《中算史论丛》(四)(1955) pp. 53、72. 又白尚恕《秦九韶测望九问造术之探讨》，载《宋元数学史论文集》(1966) p. 296. 另见王守义《介绍“中国学者在数学领域中的成就”》，载《数学进展》(1958) 4卷2期 p.311.

费苦心的．这也许是比较合理的解释．其实为了说明解法，直接写出一个10次方程来也未尝不可，不一定每一个例题都要说明实际来源．

秦九韶解法比霍纳、鲁非尼早五百多年，此种解法改称为"秦九韶法"是完全应该的．

秦九韶还独立发现了用三角形三边表其面积的"海伦公式" $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$．《数书九章》卷五"三斜求积"题："问沙田一段，有三斜（三角形的三边），其小斜一十三里（小边 $c=13$），中斜一十四里（中边 $b=14$），大斜一十五里（大边 $a=15$）．里法三百步（每一里300步）．欲知为田几何．答曰：田积三百一十五顷．"[1]

所用的方法是，解下列二次方程，即得面积 x：

$$x^2-\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]=0,$$

不难证明，和海伦公式是等价的．

第三节　李　冶

李冶（1192—1279）原名李冶，后来改作李冶[2]．字仁卿，号敬斋，金真定栾城县（今河北省栾城县之北）人．金正大七年（1230）考中进士，出任钧州（今河南禹县）的知州．1232

〔1〕1顷＝100亩，1亩＝240平方步．

〔2〕关于李冶名字的问题参考程廷熙《附录：李冶、李冶》，载《数学通报》(1953.6)p.48．许莼舫《李冶在数学上的伟大成就》，载《数学通报》(1956.10)p.9．

年钧州被蒙古兵占领，李冶微服北渡，流落在忻、崞（今山西太原北）之间．起先隐居在崞山桐川，“聚书环堵”，埋头研究数学．1248年著成《测圆海镜》十二卷．1251年住到元氏（今河北元氏县）的封龙山（今获鹿县南），聚集门徒讲学，直到1279年以87岁的高龄逝世．他的著作还有《益古演段》三卷（1259）．[1]

《测圆海镜》是李冶生平得意杰作，他临终时对他的儿子克修说："吾平生著述，死后可尽燔（fán，烧）去，独《测圆海镜》一书，虽九九小数，吾尝精思致力于此，后世必有知者．"[2]他在自序（1248年9月末）里说《测圆海镜》是根据洞渊"九容"之说推衍而得．洞渊可能是一个精通数学的隐士．

《九章算术》勾股章第16题：

"今有勾八步，股十五步，问勾中容圆，径几何？答曰：六步．术曰：八步为勾，十五步为股，为之求弦．三位并之为法，以勾乘股，倍之为实．实如法得径一步．"

直角三角形小直角边 $a=8$，大直角边 $b=15$，问内切圆的直径 d 是多少？由勾股定理，求得弦 $c=17$．不难证明[3]

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}=6.$$

---

〔1〕李冶传见明宋濂《元史》卷一百六十．李俨《测圆海镜研究历程考》，载《中算史论丛》（四）（1955）p.235．

〔2〕王德渊撰《测圆海镜后序》（1287）．

〔3〕直角三角形面积 $\triangle=\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}ab$，故 $d=\frac{2ab}{a+b+c}$．又根据自圆外一点至圆所作二切线相等的关系，易证 $d=a+b-c$．

这是后世“勾股容圆”问题的起源．朱世杰《四元玉鉴》（1303）卷中之五：“今有圆城不知大小，各中开门．甲、乙俱从城心而出，甲出南门一十五步而立，乙出东门四十步见甲，问城几何？”也是勾股容圆的引申．

所谓“九容”，是洞渊推广“勾股容圆”的九个题目．后来李冶将“九容”大加阐发，共得170问，编成《测圆海镜》（1248）一书，广泛使用了“天元术”．

宋、元的“天元术”，相当于现在的代数或方程论．[1]现存数学书中“天元”的名称，最早见于秦九韶的大衍求一术．李冶的《测圆海镜》和《益古演段》明确地用“天元”来代表未知数x．术语“立天元一”是设未知数为x，以常数项为“太极”，在旁边记“太”字，x的系数旁边记“元”字．《测圆海镜》规定常数项（太）在一次项(元)的下面，和《益古演段》及其他作者的“元在太下”正好相反．元下必太，太上必元．

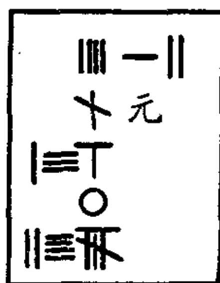


图　50

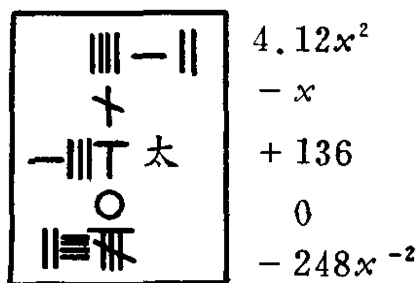


图　51

〔1〕元祖颐《四元玉鉴后序》：“平阳蒋周撰《益古》，博陆李文一撰《照胆》，鹿泉石信道撰《钤经》，平水刘汝谐撰《如积释锁》，绛人元裕之细草，后人始知有天元也．”程大位《算法统宗》(1592)书末列《益古算法》、《钤经》为元丰（1078—1085)、绍兴(1131—1162)、淳祐（1241—1252）以来刊刻的数学书（《益古》列为第二），可见“天元术”从十一世纪起急崛地发展，著作如雨后春笋．可惜这些书均已失传，无法得见全豹．

敌有元字，不记太字，有太字不记元字。每一层的次数比下一层多1。如图50或图51表示$4.12x^2-x+136-248x^{-2}$。李冶创用在筹上加斜画表示负数。这样就省去用文字表示的麻烦，类似近世的符号代数。以后朱世杰也沿用这种办法。

李冶列方程的步骤和现在完全一样，先“立天元一”（设未知数为 x），再依题意列出两个相等的代数式，“相消”（相当于集项于方程左端，使右端为0）后，便得“开方式”（所求方程）。

第四节　杨　辉

杨辉字谦光，钱塘（今杭州）人。南宋景定二年（1261）作《详解九章算法》，后附《纂类》，共12卷。现在所流传的，只是书的一部分。《永乐大典》[1]中还保存了一部分。

英国剑桥大学藏的《永乐大典》卷16344[2]所存录的《详解九章算法》载有：“开方作法本源”。并有自注：“出《释锁》算书，贾宪用此术。”这就是 $(a+x)^n(n=1,\cdots,6)$ 展开式各项的系数（二项系数）的排列[3]（图52）。欧洲称为“帕

〔1〕《永乐大典》是一部大丛书，22877卷，1200册。明永乐元年（1403）开始编修，到永乐六年(1408)冬成书。全是手写的，参加工作的人有2169人之多。共原本、正本、副本三部。原本、正本已毁于火。副本也渐渐散失。1900年八国联军侵入北京，帝国主义者又抢走了很多，现在已经剩下很少了。西方性质相近的《大英百科全书》、《法国百科全书》都是18世纪的产物，已在《永乐大典》之后三百余年了。

〔2〕李俨《永乐大典算书》，载《中算史论丛》（二）(1954)p.47,p.70。

〔3〕后来在朱世杰《四元玉鉴》(1303)中也载有这种图，见图53。

斯卡三角形”(Pascal Triangle)。

帕斯卡在1653年开始应用这三角形，但发表是在1665年的遗作《算术三角形》(Traité du triangle arithmétique)中。帕斯卡没有给出的证明。[1]

欧洲在帕斯卡之前，知道这三角形的，大有人在[2]。最早发表的是阿披亚纳斯(Petrus Apianus, 1495—1552. 4. 21，德国人)，他在1527年出版的算术书的封面记有此图。从那时起到帕斯卡这一百多年间，还有不少人讨论过这个三角形，而且多数以为是自己的发明。实际上1427年左右阿尔·卡西已给出二项系数的一般式

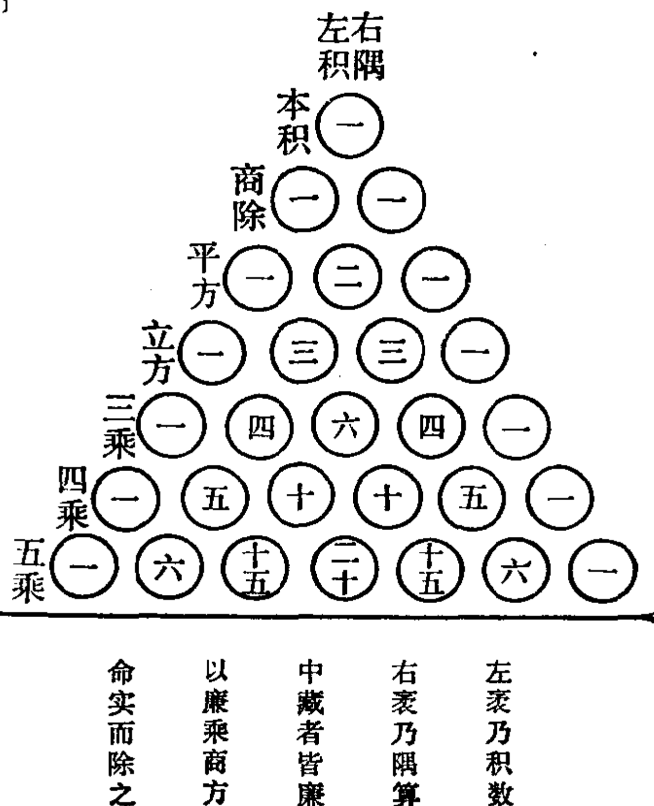


图 52

子并加证明，不过无论是阿尔·卡西或阿披亚纳斯，都在杨辉之后，前者晚166年！后者晚266年！

根据杨辉的自注，可知这三角形不是杨辉的发明。至少可以推到贾宪（约1200），我们姑且以贾宪为这三角形的发明人。因为倘若贾宪以前已有人用，杨辉就不会说：“出《释锁》

[1] V.Sanford, A Short History of Mathematics(1930) p.178.

[2] 李俨《中算家的巴斯噶三角形研究》，载《中算史论丛》（一）（1954）pp.230—245.

算书，贾宪用此术”，除非他一点也不知道. 无论如何，把图形叫做“杨辉三角”或“贾宪三角”，都比叫做“帕斯卡三角”合理.

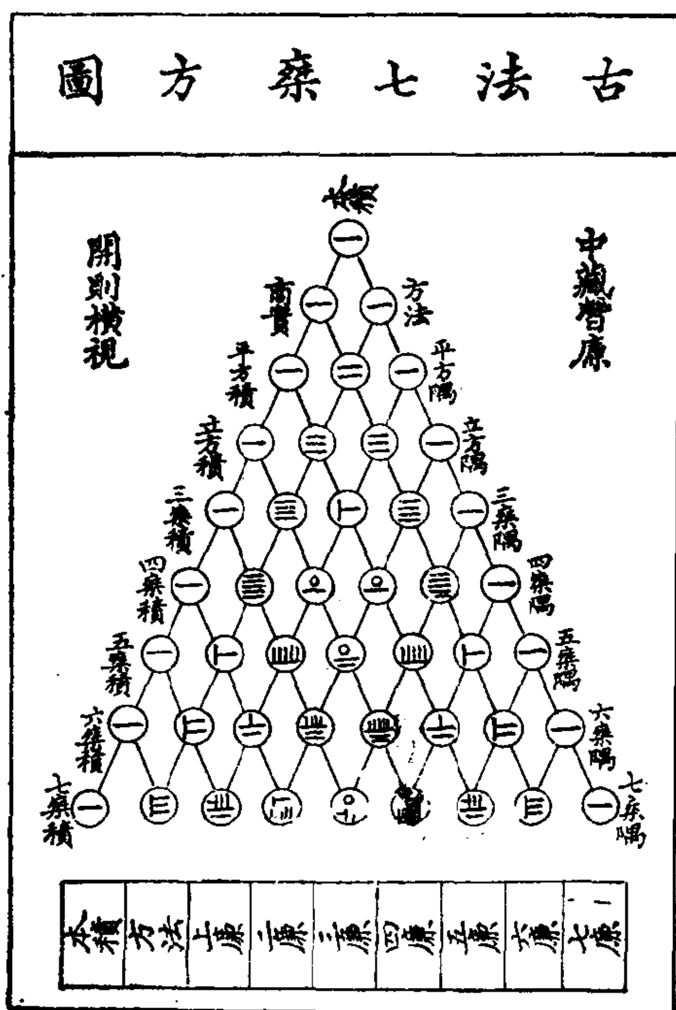


图　53

贾宪用图52来说明开方的法则而不仅仅是求出二项系数. 所以叫做“开方作法本源”. 图下是开方的术文，“袤”字《说文》解释为：“南北曰袤，东西曰广”. 长方形的宽和长有时说成广袤. 广指东西的边长，袤指南北的边长. 南北引申为上下. “左袤乃积数”指左边由上而下的那一行㊀㊀…是$(a+x)^n$展开式中常数项系数；“右袤乃隅算”右边由上而下的㊀㊀…

是展式最高项系数；“中藏者皆廉”，中间的那些数是对应各次项的系数；“以廉乘商方，命实而除之”，开方或解方程时用所得的商乘各次项系数，再从实中减去(指开方各个步骤)。[1]

杨辉在图下还举了两个例题，一个是开立方（“开增乘立方除之”）问题，一个是开四次方（“递增三乘开方”）。后者相当于解方程 $x^4-1336336=0$.

贾宪提出“开方作法本源”和“增乘开方法”是数学史上的一项伟大成就，[2]它导致后来高次方程求实根的一整套方法。

除《详解九章算法》外，杨辉还有很丰富的著作，其中《续古摘奇算法》（1275）记载了许多当时及古代的书目，从中可以窥见失传典籍的一斑。[3]这书还列出了各式各样的纵横图（幻方），[4]是宋代研究纵横图最重要的著作。

第五节 郭守敬

郭守敬（1231—1316），字若思，顺德邢台（今河北邢台）人。[5]是元代的水利专家、天文学家兼数学家。祖父郭荣，精通水利、数学。郭守敬对水利也有很大的建树。

元世祖忽必烈（1215—1294）1262年召见郭守敬，他向世

---

〔1〕通常认为袤字是衺（邪的异体字，邪通斜）字之误。“左衺”解释作左边的斜行㊀㊀….现不改此字，试解释如上.此三角的种种性质见华罗庚《从杨辉三角谈起》(1956)。

〔2〕钱宝琮《增乘开方法的历史发展》，载《科学史集刊》(1959)2期 p.132.

〔3〕阮元《畴人传》卷二十二《杨辉》。

〔4〕李俨《中算家的纵横图研究》，载《中算史论丛》（一）（1954）p.177.

〔5〕《元史》卷一百六十四．阮元《畴人传》卷二十五．薄树人《郭守敬》(1978)。

祖"面陈水利六事"，颇得信任. "每奏一事，世祖叹曰：'任事者如此人，不为素餐（没有白吃饭）矣！'"

忽必烈命郭守敬和王恂（1236—1282）编制新历法. 守敬主张历法应以实际观测为根据. 过去《太初历》假托于黄钟，《大衍历》附合于易象，独"《授时历》则以测验算术为宗，惟求合天，不牵合律吕卦爻".[1] 一扫以往反科学的积习. 破除世俗迷信，使历法步入正轨. 这巨大的功劳是值得后人纪念的.

1280年历法编成，名《授时历》. 1281年（至元十八年正月初一）颁行，直到明初. 明代还是袭用《授时历》，改称为《大统历》，是西法传入以前我国最后一种历法. 行至明崇祯末年（1644），连《授时历》在内前后共行364年，时间之久也是过去未曾有过的.

郭守敬主张以实测为主，特别创制了十三种天文仪器（1276），机巧精密，远胜前人. 比丹麦人第谷所发明同样的仪器早三百年[2].

郭守敬还发起组织庞大的天文测量网. "东至高丽（朝鲜），西极滇池（昆明），南踰朱崖（海南岛），北尽铁勒（青海一带） 四海测验，凡二十七所."地点遍及全国，观测日、月交食、昼夜长短、星辰位置等等. 规模之宏大，实是空前！

郭守敬的数学贡献，主要是三次内插法和球面三角，都和

---

〔1〕《明史》卷三十二.

〔2〕陈遵妫《中国古代天文学简史》(1955)p.133.

天文计算密切相关。

郭守敬发现用刘焯的二次内插法来计算日躔还不够精密，于是创立三次内插法，定名为“平立定三差法”。

将时间(x)分为若干段（每段长 h），“各段实测日躔度数，与平行相较以为积差。”[1] 实测得各段太阳移动的度数，和平均值的差，叫做积差 $f(x)$。

将实测数值列成差分表：

	x（积日）	$f(x)$（积差）	$\triangle f(x)$
初段	0	$f(0)=0$	
			$\triangle f(0)=7058.0250$
第一段	$h=14.82$	$f(h)=7058.0250$	
			$\triangle f(h)=5918.3670$
第二段	$2h=29.64$	$f(2h)=12976.3920$	⋮
⋮	⋮	⋮	

$\triangle^2 f(x)$	$\triangle^3 f(x)$	$\triangle^4 f(x)$
$\triangle^2 f(0)=-1139.6580$		
	$\triangle^3 f(0)=-61.3548$	
$\triangle^2 f(h)=-1201.0128$	⋮	0
⋮		

4阶差为0，又开始时积差为0，即 $f(0)=0$，根据内插法公式[2]可得（令$a=0$）：

$$f(nh)=n\triangle f(0)+\frac{n(n-1)}{2!}\triangle^2 f(0)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\triangle^3 f(0). \tag{10}$$

$f(nh)$是 n 的 3 次函数，只要将n 值代入，便可求出$f(nh)$。郭守敬引入一个辅助函数，使计算化为二次问题。

---

〔1〕《明史》卷三十三，《历三・大统历法》一下。

〔2〕见本书第十六章第三节公式（1）。p.408。

令 $F(nh)=\dfrac{f(nh)}{nh}$，则（10）式化为

$$F(nh)=\frac{1}{h}\left[\triangle f(0)-\frac{1}{2}\triangle^2 f(0)+\frac{1}{3}\triangle^3 f(0)\right]$$

$$+\frac{n}{2h}\left[\triangle^2 f(0)-\triangle^3 f(0)\right]+\frac{n^2}{6h}\triangle^3 f(0),$$

这是 n 的二次函数，故作出差分表，3阶差已为0．

	x（积日）	$F(x)$（日平差）	$\triangle F(x)$（一差）	$\triangle^2 F(x)$（二差）	$\triangle^3 F(x)$
初　段	0	$F(0)$			
			$\triangle F(0)$		
第一段	h	$F(h)=\dfrac{f(h)}{h}=476.25$		$\triangle^2 F(0)=-1.38$	
			$\triangle F(h)=-38.45$		0
第二段	$2h$	$F(2h)=\dfrac{f(2h)}{2h}=437.80$		$\triangle^2 F(h)=-1.38$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

2阶差为常数，$\triangle^2 F(0)=\triangle^2 F(h)=\cdots$．又按内插公式

$$F(nh)=F(0)+n\triangle F(0)+\frac{n(n-1)}{2!}\triangle^2 F(0)$$

$$=F(0)+n\left[\triangle F(0)-\frac{1}{2}\triangle^2 F(0)\right]+\frac{n^2}{2}\triangle^2 F(0). \tag{11}$$

根据差分表可知

$F(0)=F(h)-\triangle F(h)+\triangle^2 F(h)$，$\triangle F(0)-\dfrac{1}{2}\triangle^2 F(0)$

$$= \triangle F(h) - \triangle^2 F(0) - \frac{1}{2}\triangle^2 F(0)$$

$= \triangle F(h) - \triangle^2 F(h) - \frac{1}{2}\triangle^2 F(h)$，代入（11），又记

$nh = m$，得 $F(m) = [F(h) + \triangle^2 F(h) - \triangle F(h)] - \frac{1}{h}\left[\triangle^2 F(h) - \triangle F(h) + \frac{1}{2}\triangle^2 F(h)\right]m + \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{2}\triangle^2 F(h)\right]m^2$ （12）

这就是郭守敬使用的内插公式。

又 $A = F(h) + \triangle^2 F(h) - \triangle F(h)$ 称为"定差"，

$B = \frac{1}{h}\left[\triangle^2 F(h) - \triangle F(h) + \frac{1}{2}\triangle^2 F(h)\right]$ 称为"平差"，

$C = \frac{1}{h^2}\left[-\frac{1}{2}\triangle^2 F(h)\right]$ 称为"立差"，

（12）式简化为

$$F(m) = A - Bm - Cm^2,$$

以实测值代入，得 $F(m) = 513.32 - 2.46m - 0.0031m^2$。

因 $F(m) = \frac{f(m)}{m}$，故想求任一天（nh日）的积差（或盈缩差），可用公式

$$f(nh) = f(m) = Am - Bm^2 - Cm^3. \text{[1]} \tag{13}$$

同样的内插公式，1670年才开始为格列哥里所用，晚了将近四个世纪！

郭守敬另一方面的贡献是球面三角学。

图54中N是天球北极，O是地球上观测点，$\overset{\frown}{ACE}$是天球赤

[1] 见《元史》卷五十四，《授时历经》上，步日躔第三，求盈缩差。

道的象限弧（大圆的$\frac{1}{4}$），$\overset{\frown}{ABD}$是黄道的象限弧，A是春分点，D是夏至点．$\overset{\frown}{NBC}$是通过B的时圈，角A（$\angle BAC$）是黄赤交角，可用$\overset{\frown}{ED}$量度．现已知黄道上某天体B的黄经$\overset{\frown}{AB}=c$，欲求B的赤经$\overset{\frown}{AC}=b$，和赤纬$\overset{\frown}{CB}=a$．黄赤交角A由实测定出，C是直角．

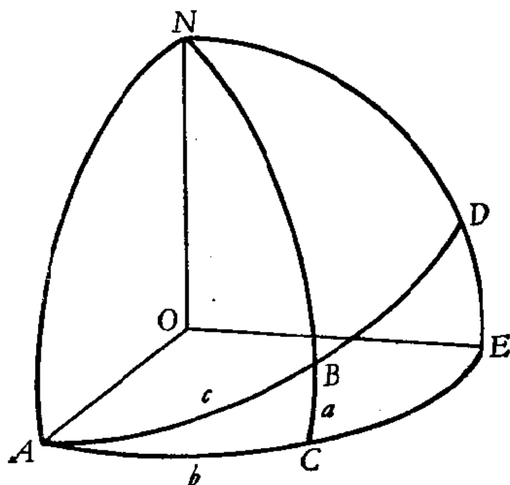


图 54

解球面直角三角形ABC得

$$\sin a=\sin c\cdot\sin A \quad (14)$$

这是郭守敬所用公式之一．

又　$\cos A=\text{tg}\, b\cdot\text{ctg}\, c$

或　$\text{tg}\, b=\cos A\cdot\text{tg}\, c \quad (15)$

郭守敬没有直接用（15）．将它代入恒等式

$$\sin b=\frac{\text{tg}\, b}{\sqrt{1+\text{tg}^2 b}}$$

得

$$\sin b=\frac{\text{tg}\, c\cos A}{\sqrt{1+\text{tg}^2 c\cos^2 A}}=\frac{\sin c\cos A}{\sqrt{\cos^2 c+\sin^2 c\cos^2 A}} \quad (16)$$

这才是他使用的公式．实际上他给出的条件是c的余弧$\overset{\frown}{BD}$，求出的是赤经的余弧$\overset{\frown}{CE}$和赤纬a．不过问题的实质还是一样．

我国历来非常注重天文历法，因此球面三角并不自郭守敬始．但是过去历法的记载，或者是节省篇幅，或者是故神其说，使旁人莫测高深，尽量将详细推导过程略去．因此无法知道其来源．将解法明显地列成公式，并给出详细的证明，郭守

敬确是首创.

可惜我国一向没有角的函数的概念，只是解决了属于球面三角范围内的问题，但没有出现三角函数. 这一点可以作为没有受到外来影响的证据.

第六节 朱世杰

朱世杰字汉卿，号松庭，寓居在燕山（今北京），不知是何处人. 曾周游四方二十余年，复游广陵，踵门而学者云集. [1]

我国数学家多兼治历法，而且往往是高官显爵. 朱世杰没有编过历法，也从未做过大官，所以连生平事迹都没有流传下来. 从他周游四方，广收门徒的事实来看，可以猜想他是以讲学为生的专业数学家.

宋、元两代名家辈出，秦九韶、李冶精娴天元术，沈括、郭守敬擅长差分法，而朱世杰兼有二者之长. 他将天元术推广成四元术，对差分法也大加发挥，曲尽其妙. 宋、元数学演进至此，达到登峰造极的地步！

朱世杰在元成宗（铁穆耳）大德己亥年（1299）著《算学启蒙》刊行于世. 后来一度失传，明、清两代的学者只知道书名，看不到原著. 幸好传到朝鲜去，保存下来. 清嘉庆年间（1809），朝鲜金鲁敬同其长子金正喜到中国，才知道中国已没有这本书. 于是根据顺治十七年（1660）朝鲜金始振重刻本传刻，我国才重见《算学启蒙》. [2]

---

〔1〕莫若《四元玉鉴前序》（1303），祖颐《四元玉鉴后序》（1303）.

〔2〕李俨《从中国算学史上看中朝文化交流》，载《中算论丛》（五）（1955）p.191.

朱世杰另一杰作是《四元玉鉴》，大德癸卯年（1303）上元日（正月十五日）刊行，清道光十四年（1834）罗士琳（1774—1853）补作细草。自从《九章算术》提出了多元一次联立方程，多少世纪没有显著的进步。贾宪、秦九韶、李冶只着眼于一元（天元）高次方程。朱世杰集前贤之大成，建立了四元高次方程理论。用天、地、人、物表示四个未知数，相当于现在的 x、y、z、u。

在外国，多元方程组虽然也偶然在古代的民族中出现过，例如巴比伦人借助数表处理过某种二元二次方程组，[1] 但较系统地研究却迟至16世纪。

1559年彪特（Joannes Buteo，生于1485—1492年间，卒于1560—1572年间，法国人）才开始用不同的字母 $A, B, C, \cdots$ 来表示不同的未知数。过去不同未知数用同一个符号来表示，以致含混不清。[2]

正式讨论多元高次方程组已到18世纪，由探究高次代数曲线 $f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$ 的交点数而引起。1764年培祖（Étienne Bézout，1730.3.31—1783.9.27，法国人）提出用消去法去解，1779年在《代数方程的一般理论》（Théorie générale des équations algébriques）中给出解法。[3]这已在朱世杰之后四、五百年了！

《四元玉鉴》开头便有“四象细草假令之图”。举了四个

---

〔1〕E.T. Bell, The Development of Mathematics (1945) p.37.

〔2〕V.Sanford, A Short History of Mathematics (1930) p.164.

〔3〕M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) p. 608.

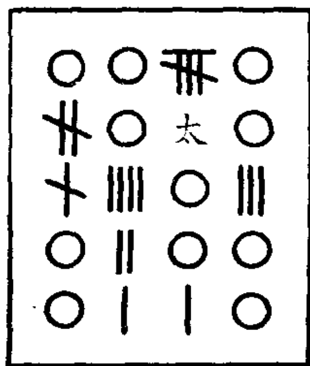
例子说明一元方程（一气混元），二元方程（两仪化元），三元方程（三才运元），四元方程（四象会元）的布算方法，和各个未知数（元）的排列方式．规定太极（简记为太，即常数项）放在中央，天元（x）在太下，天元下是天元方（x^2），如



表示 x，



表示 $x+2x^2$，数上加斜画表示负数．地元(y) 在太之左，人元（z）在太之右，物元(u) 在太之上．例如右下图



相当于 $x^3+4xy+2x^2y+x^3y-2y^2-xy^2+3xz-8u=0$，或这方程的左端．一个式子表示一个多项式或方程要看上下文来确定．原书列式没有方框，为了整齐起见加上．

以第一题“一气混元”为例，

“今有黄方乘直积得二十四步，只云股弦和九步，问勾几何？答曰三步”．

“黄方”是直角三角形内切圆直径（d），设勾、股、弦各为x,y,z，易知 $d=x+y-z$．“直积”是两个直角三角形拼成的矩形的面积xy．所给条件是

$xy(x+y-z)=24$，$y+z=9$，又$x^2+y^2=z^2$．

消去 y,z后得

$$x^5-9x^4-81x^3+729x^2-3888=0. \qquad (17)$$

原书只设一个未知数 x（“立天元一为勾”），直接列出这 5 次方程（17）（图55）．罗士琳的补草步骤和现在消去y，

x 步骤不同，但结果一样．原书只求出一个答案$x=3$。[1]

这是比较简单的例，后面不少问题要复杂得多，数字也惊人地庞大．如卷中之九最后一题用到方程

$$661500x^8-25704000x^7+\cdots+323477488424448000x-12789812580032742400=0.$$

图　55

卷下之七最后一题是三元联立方程，消去一元后得

$$-4x^{10}+4x^9+52x^8-54x^7-\cdots-4x^8y+4x^9y+80xy^2-4x^2y^2-\cdots+8x^5y^2-4x^6y^2=0,$$

共27项之多！再消去一元得15次方程

$$-4x^{15}+8x^{14}+\cdots-3596x+3560=0.$$

这样的方程，不但过去从未有过，就是在今天也很少见．从这些问题看来，朱世杰非常熟练地掌握了多元高次方程的解法，他的技巧业已达到炉火纯青的境地．正是"阴阳升降，进退左右，互通变化，错综无穷。"[2]

《四元玉鉴》卷中之六"或问歌彖（tuàn）"，载有十二个歌谣体算题，这是我国歌谣体算题的始祖。

---

〔1〕方程（17）有5个实根：3，6.614279029，10.36675822，－2.137158552，－8.843878693．负根显然不合题意，又因 $y+z=9$，所以 $x=10.3\cdots$ 也应弃去．但 $x=6.614279029$ 是合乎条件的，由此得 $y=2.069517385$，$z=6.930482615$．古人解方程往往得到一个正根即已满足．

〔2〕莫若《四元玉鉴前序》．

朱世杰除了四元术之外，高阶等差数列的研究也独步一时。[1] 他发展了沈括的隙积术，杨辉的堆垛术，郭守敬的平立定三差法，求出各种高阶等差数列的和。解决了堆垛和“招差”[2] 问题。

《四元玉鉴》卷中之十，“如象招数”门，列有招收差夫，招收士兵等五个问题。这也许是“招差术”的原来意思。“差”作差额、差数解。招差术与堆垛术原来是有些区别的，不过归根结蒂都是高阶等差数列的问题，它可以应用到内插法上去，属于现在的有限差分法。

朱世杰所用到的公式很多。《四元玉鉴》卷中之七“茭草（干草）形段”第一问：“今有茭草六百八十束，欲令‘落一形’埵（同垛）之，问底子几何？答曰：一十五束。”

所谓“落一形”，是顶上1个，下一层3个，再下一层6个，再下一层10个，…成三角锥的堆积。现知总数680，求底层一边的个数。按公式

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2),\quad \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=680,$$

解方程得 $n=15$。

此外还有“撒星形”：

---

〔1〕李俨《中算史论丛》（一）（1954）p.339.

〔2〕“招差”的名称最早见于元苏天爵《元文类》，记载郭守敬“所创法凡五事，一曰太阳盈缩，…，依立招差，…二曰月行迟疾，…依垛叠招差，求得转分进退，其迟疾度数，逐时不同，盖前所未有”．见严敦杰《中算家的招差术》，载《数学通报》(1955.1) p.13．又秦九韶《数书九章》卷十三第三问“计造石坝”，说“以商功求之，招法入之．”

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

“撒星更落一形”：

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

等多种．

又如卷下之一“果垛叠藏”第五问：“今有四角岚峰形果子积四百四十八个，问底子几何？答曰五个。”

“四角岚峰形”

$$\sum_{1}^{n}\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{60}n(n+1)\quad(n+2)\left\{n\left(4n+\frac{3}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(4n+\frac{1}{2}\right)\right\}=448,\text{导致方程 } 4n^5+17\frac{1}{2}n^4+25n^3$$

$$+12\frac{1}{2}n^2+n-26880=0,\text{ 故得}\quad n=5.$$

欧洲的有限差分学除了格列哥里、牛顿的内插公式外，一般公认是1715年泰勒所首创．在他的名著《增量方法》中开展了这新分支的研究．[1] 他一定想不到四百多年前的朱世杰已经在这问题上遥遥领先了！

总而言之，从北宋到元代中叶，我国数学有了一套严整的系统和完备的算法，是我国古代数学的全盛时期．这时欧洲还处在中世纪，我国数学家光辉灿烂的成就，远远走在世界的前列！

[1] F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p.226. J.F. Scott, A History of Mathematics(1958) p.180.

第十八章　明、清西学输入时期

宋、元是中国数学的极盛时期，西方数学确是望尘莫及．明代（1368—1644）以后，欧洲逐渐步入资本主义社会，近代数学受生产力的刺激发展起来，而中国仍旧长期停滞在封建社会之中．

明代统治阶级的昏溃腐化，极端君主专权，成为社会向前发展的障碍物．清代统治者也百般摧残文化，大兴文字冤狱，继续推行桎梏青年学子思想的八股取士制．严禁言论自由，窒息进步思想的发展与交流，阻塞科学研究的开展．

15世纪虽然也有郑和（1371—1435）那样的航海家，16世纪也出现过李时珍（1518—1593）《本草纲目》那样的医学巨著，但一般说来，明、清两代的数理科学是远远赶不上欧洲的．

在西方学术输入之前，我国数学不但没有向前迈进，就连宋、元两代惨淡经营建立起来的天元术也失传了．

明唐顺之（1507—1560）算是有名的数学家，但读《测圆海镜》而不知"立天元术"（不知道为什么要设未知数等于x）．顾应祥（1483—1565）曾著《测圆海镜分类释术》十卷（1550），《测圆算术》四卷（1553）等书，也是因为他对"立天元一"（组成方程和解方程的步骤）一窍不通，认为是多此一举，于是自作聪明，将书中细草（实际是原书的精华）尽行删去[1]．

〔1〕阮元《畴人传》（1799）卷三十《唐顺之》、《顾应祥》．

这种可笑的举动和罗马时代布依西亚斯（Anicius Manlius Severinus Boethius，约475—524）著几何书时，将欧几里得《几何原本》的证明完全删去不约而同。[1]

元代中叶以后，我国数学出现中断的现象。明代更没有继承宋、元那些难能可贵的学术遗产，加以充实发扬。

第一节　珠算与《算法统宗》

明代在西方数学输入之前，最大的成就可以说是珠算的发明。最重要的数学书要算程大位的《算法统宗》（1592）。

在电子计算机普及之前，算盘以其构造简单，价格低廉，计算迅速，数百年来受到广大群众的欢迎，至今仍盛行不衰。

“珠算”的名称，在《数术记遗》[2]中已经出现，这可能是后世珠算的萌芽。可惜描述过简，未知其详。

我国历来注重计算器械，从算筹发展到算盘是很自然的事。明陶宗仪《辍耕录》（1366）有“算盘珠”的比喻：“算盘珠，言拨之则动”。明吴敬（杭州府仁和县[3]人）1450年撰《九章算法比类大全》有“不用算盘，至无差误”；“免用算盘并算子，乘除加减不为难”等话。这是提到算盘的最早数学著作。[4]

确实可考的记述算盘的书，以柯尚迁《数学通轨》（1578）为最早。其中载有十三桁的算盘，和现在的形式完全一样，并

〔1〕F.Cajori, A History of Mathematics (1919) p.67.

〔2〕本书第十五章第四节，p.387.

〔3〕今浙江杭县.

〔4〕李俨《珠算制度考》，载《中算史论丛》（四）(1955) pp.9—23.

有计算歌诀．到程大位的《算法统宗》，详述算盘的制度和用法，珠算到此已完全成熟．

程大位字汝思，号宾渠，新安人，[1]生于1533年．在1592年编成《直指算法统宗》（简称《算法统宗》），万历二十一年（1593）浙江（即浙江）吴继绶作序．这是流传很广的一部书．卷二列有算盘的式样，和各种运算口诀，是后世珠算口诀的张本．

《算法统宗》内容颇丰富，但除了算盘和歌诀之外，没有新的创造，基本上是整理前人作品的书．并且还漏掉了高次方程和多元高次方程等重要部分．

相传明末日本毛利重能到中国学数学，把《算法统宗》带回去．他所著的《割算书》(1622)和他的门徒吉田光由（1598—1672）所著《尘劫记》（1627）都记述珠算方法．[2]不过算盘或者在《算法统宗》之前就已流入了日本．

日本算盘叫"十露盤"，算珠由圆形改成菱形(纵截面)，梁上两珠变成一珠．现在我国东北所使用的算盘就是这一种，比关内算盘小得多，狭而长（常见的有7×38cm），桁数多至27．

希腊时代也有"算盘"（ἄβαξ 或 ἀβάκιον)，不过和现在的算盘是两回事．在一个盘上刻划许多直行或横行，用石子或木钉放在行上记数，这是最原始的记数方法．同时，画几何图或记数的沙板也叫ἄβαξ，后来转成拉丁文abacus或abax及英文abacus．[3]

---

〔1〕另一说为安徽休宁人．

〔2〕藤原松三郎《日本数学史要》(1956) pp.41—51．

〔3〕T. Heath, A History of Greek Mathematics (1921) pp.46—47．

罗马改良了这种算盘。在盘上刻槽，槽内放置珠子，也可以拿走。再进一步将珠子嵌在金属制的槽里面，可以上下移动，不可以拿走。罗马人不懂位值制记数法，算盘的槽上要刻字母表示单位。另一方面，他们又用12进分数，在算盘上另添小槽表示分数，通分加减，十分麻烦。[1]

西方人没有九九乘法口诀。我国文字一字一音，编成口诀，顺口流利。外文一字数音，不便口诀化。

罗马算盘是铜制的，价昂贵不利于普及，而且很笨重。不象中国算盘是竹制的，轻便而价廉。罗马算盘的这些缺点，使得它逐渐被淘汰，最后成为博物馆的陈列品。欧洲人又回到摆石子的“算板”(counting board)的老路上去。

古俄罗斯人也有一种算盘(счёты)，若干弧形的木条，横着镶在木框内，每条穿着十个珠子。珠子一当一，二当二，不象中国上珠一当五，下珠一当一，[2]因此计算速度大受限制。

第二节　西方数学的输入

明代欧洲的传教士源源不断来到中国。大概是为了提高威信及取得一定的社会地位，以利于传教工作，所以或多或少附带输入一些西方的科学。另一方面，我国那时科学裹足不前，科学技术的传入，正适合当时的社会需要。

西方数学的输入，以利玛窦来华为起点。利玛窦(Matteo

〔1〕F. Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p.38.

〔2〕И.Г. Спасский, Происхождение и история русских счетов, Историко-математические исследования V, стр.269—420.

Ricci）1552.10.6生于意大利东部的马切腊塔（Macerata，靠近亚得里亚海岸），1610.5.11卒于北京。大科学家伽利略年青时听过利玛窦的几何学课，使伽利略对数学发生了浓厚的兴趣，终身不渝。[1]

利玛窦1582年（明万历十年壬午）来到了中国。[2]最初在广东传教，并不为人所知。后来慢慢以天文数学闻名。1595年北行到南京折回南昌。1596年9月22日利玛窦在南昌预测一次日食，使他的名声大振。

1600年在南京认识徐光启，从此以后，徐光启便和利玛窦共同合作研究西方科学。万历三十四年丙午（1606）秋天，利玛窦口译，徐光启执笔，合译欧几里得《几何原本》前6卷。1607年春完稿，在北京出版。[3]这是翻译西方数学书籍的开始，从此打开了中西学术交流的大门。

利玛窦又和李之藻（1566—1630）共译《同文算指》[4]等书。不久利玛窦去世（1610）。只完成了前6卷的《几何原本》的翻译工作，不得不停顿下来。

整整两个半世纪以后，《几何原本》的后9卷才由伟烈亚力和李善兰译出。清咸丰壬子（1852）开始，四历寒暑，到咸丰丙辰（1856）完成。丁巳（1857）二月刊刻。

---

〔1〕G.Wilson《科学家奋斗史话》(Great Men of Science)，曾宝施编译(1935) p.219.

〔2〕李俨《明清之际西算输入中国年表》，载《中算史论丛》（三）(1955) pp.10—68.

〔3〕见本书第五章第一节 pp.90—91.

〔4〕根据C.Clavius, Epitome arithmeticae practicae. 李俨《中国数学大纲》(1958) p.378.

徐光启字子先，号玄扈，1562年4月24日（明嘉靖四十一年三月二十一）生于上海，1633年11月8日（崇祯六年十月初七日）卒于北京。[1] 他毕生致力于介绍西方科学，同时注意总结中国的固有科学遗产，成为我国近代科学的启蒙大师。[2]

徐光启译著的面是很广的。数学方面除《原本》外，还著有《测量全义》（1631），这是西方三角学及测量术输入我国之始。

明代墨守元代的历法，数百年没有修改，渐渐发生差错。万历年间数次预测日、月食不准，有时误差竟达一小时（如1611年11月朔日食）。有见识的人都主张修改历法。

明崇祯二年（1629）五月初一发生一次日食，使西方天文学大露锋芒。四月二十九日公布大统历、回回历和新法（徐光启）三家的预测。实践是检验真理的唯一标准，"至期验之，光启推算为合。"[3] 因而朝廷命徐光启督修历法。并起用徐光启的朋友李之藻，举荐龙华民（Nicolò Longobardi，1559—1654，意大利人，1597年来华），邓玉函（Jean Terrenz，1576—1630，瑞士人，1621年来华），汤若望（Jean Adam Schall von Bell，1591—1666．8．15，德国人，1622年来华），罗雅谷（Jacques Rho 或 Giacomo Rho，1593—1638.4.26，意大利人，1624年来华）等人同修历法。崇祯十六年（1643）日食，

---

〔1〕现上海徐家汇有徐光启的墓，见《文汇报》（1957.1.16）。关于徐光启的遗迹，又见郑逸梅《徐光启的九间楼》，《文汇报》（1956.10.22）。

〔2〕徐光启认识到我国宝贵的实践经验，晚年集中精力整理中国的传统农业科学，编成闻名中外的巨著《农政全书》。见燕羽《徐光启和"农政全书"》，李光璧编《明清史论丛》（1957）pp.264—278.

〔3〕李俨《中国算学史》（1955）p.194.

又一次证明了新法准确．于是皇帝朱由检决定改历．但次年明亡，新历暂时搁下．

清初的皇帝很重视汤若望等人所订的历法，决定立刻采用．并指派汤若望为钦天监，掌管历法的事，优礼有加．

历史上任何一件重大的革新，常常不是一帆风顺的，清初实行新历也是这样．守旧派不懂也不愿接受先进的科学，他们群起而攻之．杨光先（1597—1669），吴明烜（烜音xuǎn）是反对新法的首脑．顺治十六年（1659）著书指摘新历．康熙三年（1664）上书反对西洋人．汤若望、南怀仁（Ferdinand Verbiest，1623．10.9—1688.1.28，比利时人，1659年来华）等因此下狱受审．次年（1665）四月斩拥护新法的官生五人，汤若望、南怀仁幸免于死．杨光先代汤若望主持历法．

三年以后（1668，汤若望已死），南怀仁东山再起，弹劾吴明烜推算错误．康熙八年（1669），“是年二月命大臣二十员赴观象台测验，南怀仁所言逐款皆符，吴明烜所言，逐款皆错．……得旨杨光先革职”．[1]

杨光先拒绝采纳先进的天文历学，固步自封，抱残守缺，最后在客观的事实面前碰得头破血流．这是值得注意的历史教训！[2]

新旧之争以后，清康熙皇帝（1654—1722）颇注意西方数学．请传教士入宫讲授，并主持编辑《历象考成》，《律吕正义》，《数理精蕴》等书．康熙死后刻成书（1723）．

---

〔1〕见清蒋良骥《东华录》．又《畴人传》三十六卷《杨光先》．

〔2〕杨光先著《不得已》，说：“宁可使中夏（即中国）无好历法，不可使中夏有西洋人．”鲁迅先生在《坟·看镜有感》一文中曾鞭挞过这个连闰月都不会算但盲目排外的杨光先．见《鲁迅全集》第一卷(1956)p.302．

徐光启、李之藻介绍西方科学，是中国卷入世界潮流的序曲。假如翻译工作持续不断，必能产生更大的影响。可惜自康熙以后，清统治者仅采用了西方的历法[1]，其余便泯灭无闻。致使徐、李的工作成为昙花一现。

清代数学家经过一段整理古代数学的努力之后，再一次大规模地吸收西方数学，最有成绩的是李善兰，华蘅芳。

李善兰字壬叔，另秋纫，海宁（今浙江海宁县）人，生于1811年1月2日（清嘉庆十五年十二月八日），卒于1882年12月9日（光绪八年十月二十九日），是清代数学界的巨擘。[2]

李善兰和伟烈亚力合译《几何原本》后九卷之外，又合译棣么甘《代数学》，[3]罗密士《代微积拾级》[4]等书。[5]

李善兰在素数论和级数论方面都有杰出的成就。他在《考数根四法》（判别素数的方法）的素数论专著中提出判别素数的重要法则。[6]

1867年李善兰完成《则古昔斋算学》十三种。其中《垛积

---

〔1〕1644—1741年用汤若望等编的"时宪历"，1742年起用戴进贤等编的"癸卯元历"，即现在的阴历。见本书第十七章第一节 p. 412.

〔2〕传记见李俨《李善兰年谱》，载《中算史论丛》（四）（1955）pp.331—361.

〔3〕本书第六章第一节. p. 130.

〔4〕本书第十章第一节. p. 243.

〔5〕后两种书在上海墨海书馆刊行(1859)，它和宁波的美华书馆是我国最早的铅印书馆. 前者成立于1847年. 那时上海还没有发电厂，用牛来带动印刷机. 有人咏其事曰："车翻墨海转轮圆，百种奇编宇内传，忙煞老牛浑未解，不耕禾垄种书田。"见贵芳《老牛"种书田"——记1847年成立的墨海书馆》，载《解放日报》(1956.12.16).

〔6〕严敦杰《中算家的素数论》，载《数学通报》(1954.4、5)

比类》详论级数，[1]指出各家的级数论不足之处．李善兰的理论可以归纳出一个恒等式[2]

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2,$$

$$\text{其中}\binom{l}{m}=\begin{cases}0\ (\text{当}l<m\text{时})\\ \dfrac{l!}{m!\,(l-m)!}\ (\text{当}l\geqslant m\text{时}).\end{cases}$$

稍后于李善兰的学者有华蘅芳（1833—1902），字若汀，江苏金匮（今无锡）人．[3]与李善兰相善．曾与傅兰雅（John Fryer，1839—?）共译代数、三角、微积分的书多种．自著《行素轩算稿》（1882）等书．

华蘅芳的书刊于19世纪末，仍然保留中国的数字．如0.07写作˙〇七，10.7写作一〇˙七．微积分的符号沿用《代微积拾级》的记法．如泰勒公式

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2!}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

记作：

"戴氏之式：函（天丄辛）＝戊丄$\dfrac{\text{伏}}{\text{彳戊}}$辛

---

〔1〕李俨《中算家的级数论》，载《中算史论丛》（一）（1954）pp. 402—418.

〔2〕李俨《中国数学发展情形（续）》，载《数学通报》（1956.5）p.11.它以"李善兰恒等式"的名称驰名于世．1954年5月匈牙利杜澜·巴尔（Turán Pál）应邀来我国作学术访问，曾宣读了《李善兰恒等式证明》的论文，见《数学通报》（1954.9）p.55．这恒等式的初等证明见《数学通报》（1955.2）p.47.

〔3〕传记见李俨《华蘅芳年谱》，载《中算史论丛》（四）（1955）pp. 362—377.

$$\perp\frac{\text{亻天}^{\text{二}}}{\text{亻}^{\text{二}}\text{戊}}\times\frac{\text{一}\cdot\text{二}}{\text{辛}^{\text{二}}}\perp\frac{\text{亻天}^{\text{三}}}{\text{亻}^{\text{三}}\text{戊}}\times\frac{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}{\text{辛}^{\text{三}}}\perp\cdots\text{”}$$

仅仅一个世纪以前的符号，现在看来是很奇特和不方便的。

第三节　整理和创新

徐光启等人的译述工作虽然一度后继无人，而且所介绍的只是西学的片断，然而对数学界已起了强烈的刺激作用。我国数学家纷纷奋起研习西方数学，并且回过头来整理国故。其中成就最大、影响最深的是梅文鼎家族。

梅文鼎，字定九，号勿庵，安徽宣城人。1633年3月16日（明崇祯六年二月初七）生于宣城，1721年（康熙六十年）卒。[1] 他29岁（1661）才开始从竹冠道士倪正（宣城人）学习《大统历算交食法》，并订正其讹误，自此以后，便立志学历算。

梅文鼎学习非常勤奋，常常废寝忘食。积六十余年之精力，著书七十多种。流传下来的以《梅氏历算丛书辑要》[2] 六十二卷最完备。可以说是冶中西数学于一炉，集古今中外之大成。梅文鼎著作的特点是深入浅出，给后来的研究和写作树立了榜样。

梅文鼎弟文鼐(nài)，文鼏(mì)(1641—?)，子以燕(1654—1705)，孙瑴(jué)成，玕(gān)成，曾孙鈖(fēn)等等都通数

---

〔1〕李俨《梅文鼎年谱》，载《中算史论丛》（三）(1955) pp. 544—576.又郑澄《伟大的数学家梅文鼎》，载《数学教学》(1957.8) p.7.

〔2〕1745（清乾隆十年）梅瑴成作序.

学。这祖孙四代的数学大家族，恰好与同时代的瑞士伯努利数学家族中外媲美。

梅瑴成，字玉汝，号循斋，1681年5月19日（清康熙二十年四月初二）生，1763年11月28日（乾隆二十八年十月十六日）卒。

当时西方代数学已传入我国，《数理精蕴》（1723）译作“借根方”．我国原有的天元术失传已久，无人通晓。梅瑴成在精研借根方之后，再回头去读郭守敬《授时历草》，李冶《测圆海镜》等书，不觉恍然大悟。原来所谓“天元一术”就是“借根方”．于是作《赤水遗珍》（1761），附录在《梅氏历算丛书辑要》中作为卷六十一，以记其事。梅瑴成举出例子，说明二者实质相同。从此天元术重新显露于世，祖国学术不致湮没无闻，这是梅瑴成的功劳。

李锐（1773—1817）字尚之，元和（今江苏吴县）人，著《开方说》三卷，未及完成而卒。下卷由弟子顺德（今广东顺德）黎应南补成。黎应南《开方说跋》作于1819年。《开方说》卷上讨论方程的正根和系数符号的关系，独立发现“笛卡儿正负号规则”，并指出虚根必成对。

大衍求一术自秦九韶（1247）以来，很少有人问津。直到清代末叶，复古之风鼎盛，研究求一术的兴趣再起。张敦仁（1754—1841）著《求一算术》(1803)，骆腾凤（1770—1841）著《艺游录》（1815），时曰醇著《求一术指》（1873），黄宗宪著《求一术通解》（1874）对此术都有所发明。特别是黄宗宪（字玉屏，湖南新化人）发现求“定母”和“乘率”捷法，“较之前人，洵所谓后来居上者矣！”（左潜《求一术通解序》）。

项名达（1789—1850）对圆锥曲线深有研究，著《椭圆求

周术》一书．1848年冬，写信给朋友戴煦说："弦矢互求，椭圆求周二种，为惬意（满意）之作．恐病躯不及蒇（chǎn，完成）事，乞代整理．"一年多以后，项名达去世，戴煦就原术补成《椭圆求周图解》（1857）．[1] 项名达用初等方法求得椭圆周长的级数表达式，和用近代椭圆积分所得的完全相同，至为难能可贵．

对数的应用，自然会导致计算尺的发明．邹伯奇（1819—1869，广东南海人）分享着发明者的荣誉．他著的《对数尺记》，死后刻入《邹征君遗书》（1873）中．[2] 尺的形式几乎和现在的计算尺一样，只是没有滑标和滑线．

中国近代数学可以说是从"五四"（1919）开始的．从1918年起，我国学者开始在国际上的杂志发表创造性的论文．

六十多年来，主要是建国三十年来，我国在数论，函数论，微分几何，拓扑学，代数，数理统计，计算数学等方面作

〔1〕李俨《中算家的圆锥曲线说》，载《中算史论丛》（三）（1955）p．524．
〔2〕李俨《计算尺发展史》（1962）p．33．

出了巨大的贡献。[1]

〔1〕这方面总结性的文章还不多，参考：

（1）陈省身《中国算学之过去与现在》，载《科学》（1941.6）25卷5、6期合刊 pp.241—245.

（2）李仲珩《三十年来中国的算学》，载《科学》（1947.3）29卷3期 pp. 67—72.

（3）华罗庚《中国数学现况介绍》，载《科学通报》（1953.2）pp.1—5；华罗庚《十年来中国数学研究工作的概况》，载《数学通报》（1959. 10）pp. 2—5.

（4）Marshall H. Stone, Mathematics in continental China, 1949—1960, American Mathematical Society Notices, vol. 8, №.3, issue №54（1961.6）pp.209—215.

（5）钱三强《中国近代科学概况》，载《科学通报》（1953.7）pp.1—6.

（6）吴之《新中国在数学、物理学、化学方面的若干理论性的工作》，载《人民日报》（1956.2.6）

（7）吴有训《中国科学院物理学数学化学部报告》，载《科学通报》（1955.7）p.20.

（8）《评述新中国科学技术事业的发展》，载《人民日报》（1974.10.17）。

各分支的情况参考：

（9）闵嗣鹤《数论在中国的发展情况》，载《数学进展》（1955）1卷2期 pp. 397—402.

（10）段学复《近代中国数学家在代数方面的贡献》，载《数学进展》（1955）1卷3期 pp.609—614.

（11）陈建功《单叶函数论在中国》，载《科学通报》（1955. 11）pp. 87—92.

（12）熊庆来《亚纯函数论的几个方面的近代研究》．载《数学进展》（1963）6卷4期 pp.307—320.

我国数学界的早期活动参考：

（13）陈省身《中国数学会》 载《科学大众》（1948.9）4卷6期．p.261.

（14）《熊庆来先生在中国科学院数学研究所欢迎会上的讲话》，载《数学进展》（1957）3卷4期 pp.675—677.

第十九章　十四世纪我国数学的中断

自古以来，我国就是一个数学的先进国家．汉、唐以后直到13世纪，数学研究从未间断．特别是宋和元朝的前半期，发展盛况更是空前．秦九韶（1247）、李冶（1248）前后，名家辈出，著述如林．但是朱世杰（1303）之后，我国数学突然出现中断的现象．

从朱世杰到明程大位（1592）的三个世纪，没有重要的创作．14世纪虽然也有《丁巨算法》（1355），严恭《通原算法》（1372）之类的算书[1]，但是数量和质量都远远不能和前期相比．1400—1500年这一百年间，连这一类书也是凤毛麟角．也许有的书没有流传下来，如果是这样，正好说明数学不受重视．明朝甚至号称专家的唐顺之、顾应祥也根本不懂"立天元一"（设未知数 x）[2]，先辈们辛勤创造的天元术，竟完全失传了．我国数学史家李俨（1892—1963.1.14）描述这时期的情况时说："考试制度久已废止，民间算学大师又继起无人，是谓中算沉寂时期．"[3]

---

〔1〕李俨《十三、十四世纪中国民间数学》（1957）．

〔2〕见本书第十八章．p.442．

〔3〕李俨《中国算学史》（1955）p. 142．

元朝自1279年起到1368年，共89年。按数学的发展情况，可以分为两期。1279—1314年(共35年)称为前期，1314—1368年（共54年）称为后期。前期还有郭守敬、朱世杰等名家，后期就出现后继无人的现象。1314年可以作为中断的分界线。

中断的原因，是数学史上一个重大问题，历来受到中外史家的重视。把这个问题探讨清楚，有助于吸取历史教训。然而历史事件是复杂的，诸家说法，各有所偏重。归结起来，大致可从这几个方面去分析：1．我国数学本身的弱点；2．数学家的思想或世界观的影响；3.社会因素（包括生产的需要）。我们着重谈谈社会因素。

第一节 知识分子的地位

蒙古人南侵和统治中国时，还处在从氏族社会末期过渡到封建制的阶段，他们的经济和文化相当落后。蒙古征服者残酷地屠杀和奴役中国人民，严重地破坏农业、手工业生产和文化遗产，对整个社会发展起了阻碍的作用。

蒙古统治者实行种族压迫，他们把各族人分为四类：蒙古人最高贵，色目人[1]次之，汉人又次之，南人[2]最贱。在使用官吏，科举，刑罚甚至在服饰上都有严格的区别。

他们又把统治下的人民分为十等。赵翼（1727—1814）在《陔余丛考》[3]卷42“九儒十丐”条记载，“郑所

〔1〕各色名目的人，如哈拉鲁、钦察、唐兀……等等。

〔2〕南宋遗民。

〔3〕以其为循陔（gāi）时所辑，故名。

南[1]集又谓，元制：一官、二吏、三僧、四道、五医、六工、七猎、八民、九儒、十丐。盖元初定天下，其轻重大概如此。”又邓之诚《中华二千年史》[2]引谢枋得[3]叠山集卷二《送方伯载归三山序》：“大元制典，人有十等：一官、二吏，先之者贵之也。……七匠、八娼、九儒、十丐，后之者贱之也。”袁黄，[4]王世贞[5]《增评加批历史纲鉴补卷》：“嗟乎卑哉，介乎娼之下，丐之上者，今之儒也。考元史不载此制，盖为世祖讳也。”

所谓儒，就是当时的读书人即知识分子。将儒列为第九等，仅在丐之上，说明当时歧视知识分子到何等严重的地步！就其生活状况来说，大概也就和丐差不多。相应地对科学也不可能重视。因此学术上的停滞也就不足为奇了。

元朝开始于1279年，那时郭守敬（1231—1316）已48岁，被强征为元制定历法。郭守敬之后，历法就一直无人修改。朱世杰的生年不详，但著《四元玉鉴》（1303）当在晚年。他死后，学术也就随之而湮灭。

第二节　科举制度

我国科举考试制度开始于隋朝（604）[6]．唐时分科取士，

〔1〕郑所南，宋人，著有《心史》一书，对元朝的事有所记载。用铁函（封套）密封起来，藏在吴中承天寺井中，明崇祯时才被人发现，后称为《铁函心史》或《井中心史》。

〔2〕（1954）卷四p.400.

〔3〕宋 弋阳人，号叠山，宝祐（1253—1258）进士。

〔4〕即袁了凡，万历进士。

〔5〕即王凤洲，嘉靖进士。

〔6〕本书第十三章第一节．pp. 318—319.

其中有“明算”科（即数学科）．直到唐朝灭亡，数学制度，尚未尝废．[1]数学考试制度在客观上促使知识分子重视数学学习．明算科出身的未必就成为数学家，正象历史上的状元未必是大学问家一样．尽管如此，唐代文风鼎盛确和统治者的提倡有密切关系．对数学的提倡也是如此．

北宋时有一些反复，例如11世纪初执政旧党认为国子监内设立算学馆是没有必要的．他们认为“将来建学之后养士设科，徒有烦费，于国事无补．”[2]祖冲之《缀术》的失传，和蔑视数学的思想是有关系的．1094年重新实行王安石新法，恢复了算学．

入元以后，考试制度完全废止．直到元仁宗皇庆二年（1313，元开国后34年）才想到要恢复考试制度．[3]考试制度停止了几十年之后，重新恢复．但不同种族之间等级森严．值得特别注意的是，考试内容以朱熹集注的“四书”为主，完全将数学内容砍去．这对数学是一个沉重的打击．

这种考试制度不久就发展为“八股取士制”．八股文是一种特殊的考试文体，立论、发挥全以“四书”为根据．全篇分破题、承题等八个部分，叫做“八股”．知识分子受这种形式死板，内容空虚的文体所束缚．摒弃其他一切有用的学术研究．

八股文起源于元，大备于明．元王充耘是元统初（1333）的进士，开始造这种文体，书名《书义矜式》．到明宪宗成化

〔1〕李俨《中国数学大纲》（上册）（1958）pp. 110, 111.

〔2〕南宋 李焘《续资治通鉴长编》（1183）卷三百八十一．钱宝琮《宋元时期数学与道学的关系》，载《宋元数学史论文集》（1966）p.226.

〔3〕清 毕沅《续资治通鉴》卷一百九十八．

（1465—1487）八股之制完全确定下来．[1] 从此八股文成为升官发财的捷径，它耗费青年学子无穷无尽的时光．于是数学便很少有人去过问．清顾炎武（1613—1682）曾一针见血地指出："八股之害，甚于焚书．"明朝虽然在国子监也设数学教育，但不外粗习算术四则，很难说超过千余年前的《九章算术》．那时宋和元初的数学早已无人通晓．

第三节　生产力的破坏、自由思想的窒息

元统治时期，中国社会经济遭受严重的摧残．忽必烈重用郭守敬，是出于编制历法的需要，无心提倡学术．历法在古代被看作是帝王权威的体现，既已编成，至少在相当年月内可以使用，无需再详加研究．随着农业、工商业衰退现象的出现，数学理论没有更多的需要，发生停滞也是很自然的事．

在元朝的残暴统治下，言论、出版、学术都受到统制和禁止．明朝实行极端的君主专制，宦官擅权，贪污贿赂成风，政治腐败达到了极点，全无自由讨论学术的气氛．

历法的编制和天文学的研究本来应该是一种学术活动，但由于它和帝王的权威联系起来，清初发生了历法上新旧之争．[2] 拥护新法的历法家惨遭杀身之祸．再加上文字狱迭起，学者动辄得咎．学术讨论，人人望而却步．一字之差，不仅可以招致丧生，还有灭族之虞．学者无发表意见的自由，欲得科学的繁荣，岂非缘木而求鱼？

---

〔1〕《辞海》（1948）p.150．

〔2〕本书第十八章第二节．p．448．

第四节 其他方面

徐光启认为明朝数学没有充分发展的原因有二："其一为名理之儒，土苴[1]天下之实事；其一为妖妄之术，谬言数有神理。"前者指当时学者鄙视一切实用之学，后者指数学研究陷入神秘主义的泥坑。[2]这是从数学家的思想来论述停滞的原因。

我国古代有些历法夹杂着迷信色彩，宣扬天命论和神秘主义，这对科学的发展是极不利的。例如《三统历》（公元前104—公元84年）[3]测得一个朔望月是$29\frac{43}{81}$天，这是29.530588的近似值。《三统历》却用"象一、春秋二、三统三、四时四，大衍之数四十九，……"勉强地凑成。[4]

其实$29\frac{43}{81}$并不是很好的近似值，$29\frac{26}{49}=29.530612$比前者更接近真值。如果《三统历》的作者知道了这个较精确的数值，是否又要推翻前面的解释重新编造新的解释呢？

这种故弄玄虚的陋习，元、明两代并未稍减，这对数学发展的影响当然是消极的。

钱宝琮[5]分析了宋、元时期的数学与道学关系之后作出结论："唯心主义道学与数学之间并无必然的联系，只有在封建统治阶级将道学定为一尊，学术思想陷于僵化的时候，数学的

〔1〕苴(zhǎ)通渣，土苴比喻轻贱的事物。

〔2〕钱宝琮《中国数学史》（1964）p.239.

〔3〕陈遵妫《中国古代天文学简史》（1955）p. 39.

〔4〕《汉书》卷二十一.

〔5〕《宋元时期数学与道学的关系》，载《宋元数学史论文集》（1966）.

发展才受到阻碍。”这是徐光启第二个原因更确切的解释。

徐光启所说的第一个原因（学者鄙视一切实用之学），李约瑟有颇不相同的看法。他在《中国科学技术史》[1]中指出：“他们（指我国数学家）只注重具体数字，并阻碍他们去考虑抽象的概念；不管怎样，中国人重视实践和经验的性格总是使他们倾向于向这方面发展。”

又说：“专门致力于统治官员所要解决的问题。土地的丈量、谷仓容积、堤坝和河渠的修建、税收、兑换率——这些似乎都是最重要的实际问题。‘为数学’而数学的场合极少。这并不意味着中国计算人员对真理不感兴趣，但他们感兴趣的不是希腊人所追求的那种抽象的、系统化的学院式真理。”

李约瑟又说：“在从实践到纯知识领域的飞跃中，中国数学是未曾参与过的。”

总的来说，李约瑟认为中国人过分注重实际问题，而忽视把经验上升为抽象的理论。

李约瑟还援引了三上义夫的说法，认为在古代中国的数学思想中，最大的缺点是缺少严格求证的思想。

三上义夫在《中国算学之特色》[2]中说：“中国先秦时代，名家[3]者流，论理（即逻辑）思想已有相当之发达。若其倾向连续而进，则论理学之成立，或能期待，亦未可知。然其倾向不能继续。后虽传入印度之因明[4]，但仅止于传入，不能

---

〔1〕汉译本，第三卷《数学》pp. 337，340，341，342。

〔2〕林科棠译，（1929）p.83。

〔3〕战国时以辩论名实（概念与事实的关系）问题为中心的一个学派，对逻辑学有贡献。

〔4〕类似近世的逻辑学。

更有发展。因此，中国之思想上，无所谓三段论法。……不便于几何学之成立，之一理由，或即在此。……中国历术家终局之努力，乃在安排日历，并未以几何学整理天文体系。中国之算学于此有一缺陷，实吾人不能不承认者也。”

三上义夫在这本书中还引用了上野清的说法：“占筮家用一至九之数，以代人世之祸福吉凶，构成八卦或九畴。是中国之《易》学者，与用文字以代数之西洋代数学，适取全反对之方向。故西洋算学与时俱进，中国从来不再进一步，其一原因，即在斯也。”

上野清的意思是西方代数学用符号来代数，而中国则用数来代事物，方向正好相反。

三上义夫又说：“中国之算学，历史甚长，且生于伟大文明系统中，然不能比较的丰富发达者，其主因盖在中国算学家，多不以算学为专业，此种意见，或亦非过言。”[1]

以上这些论述，是想用数学或数学家本身的弱点来解释停滞的原因。关于这一点，卡佐力（Florian Cajori，1859—1930）也有类似的说法。他在《数学符号史》（A History of Mathematical Notations）[2]中介绍了朱世杰多元方程的排列法之后说：“中国代数学在十三世纪以后停滞不前的事实，主要是由于它不完善的、无适应性（inelastic）的符号。”

卡佐力没有进一步解释为什么不会有人来改变这种符号，因为符号总不是一成不变的。

尤什凯维奇（А.П.Юшкевич）在《中国学者在数学领域

〔1〕《中国算学之特色》p.9.

〔2〕vol.Ⅰ（1928）p.88.

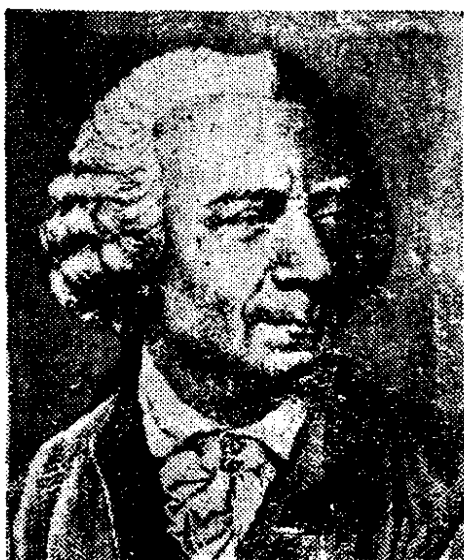
中的成就》[1]中说："中国数学经过许多世纪的高涨之后，从十四世纪中叶开始了停滞的时期。……中国数学上独创性科学研究的水准长时期低于欧洲。这是封建关系的后果及资本主义强国奴役中国的后果。"他没有更详细地解释为什么同在封建社会里，两个不同时期（宋和元朝后期）的发展速度竟如此的不同。

综上所述，学者们企图从种种不同的角度去阐明十四世纪中国数学中衰的原因。这问题相当复杂，深入探究，是具有重大意义的。

〔1〕赵孟养译，载《数学进展》（1956）2卷2期p. 277.

第四编　数学史专题选

一、失明的数学家欧拉



欧 拉 (Euler)

欧拉 (Léonard Euler)[1] 1707年4月15日生于瑞士的巴塞尔(Basel)，1783年9月18日卒于彼得堡，原籍瑞士[2]，是全世界历史上最伟大的数学家之一.他的深湛渊博的知识，无穷无尽的创作精力和空前丰富的著作都是令人吃惊的.

他从19岁起就开始写作，直到76岁．半个多世纪写下浩如烟海的书籍和论文．至今几乎每一个数学部门，都可以看到欧拉的名字．从初等几何的

〔1〕这是法文拼法，他大部分论文是用法文写的，德文 Leonhard Euler，拉丁文 Leonhardus Eulerus，俄文 Леонард Эйлер.

〔2〕欧拉的传记参考 (1) Eric Temple Bell, Men of Mathematics (1937) pp. 139—152. (2) И.Г.Башмакова и А. П. Юшкевич Леонард Эйлер, Историко-Математические Исследования, Ⅶ(1954) стр. 453—512. (3) C.C. Gillispie, Dictionary of Scientific Biography, vol. Ⅳ (1971) pp.467—484.

欧拉线，[1]多面体的欧拉定理，[2]立体解析几何的欧拉变换公式，四次方程的欧拉解法，到数论中的欧拉函数，微分方程的欧拉方程，级数论的欧拉常数，变分学的欧拉方程，复变函数论的欧拉公式等等．数也数不清．

欧拉惊人的产量并不是偶然的，他可以在任何不良的环境中工作．他常抱着孩子在膝上完成论文，也不顾较大的孩子在旁边喧哗．甚至双目失明以后，也没有停止过数学研究．在失明后的17年间，还口述著了几本书和400篇左右的论文．出版欧拉全集是十分困难的事．1909年，瑞士自然科学会就开始筹备整理出版，但直到现在也还没有出完，计划是72卷．[3]

欧拉的父亲保罗·欧拉（Paul Euler）也是一个熟练的数学家，原希望小欧拉学神学，同时教他一点数学，这使小欧拉决定他一生所走的道路．欧拉1720年秋天入巴塞尔大学以后，由于他的异常勤奋和才能，受到约翰·伯努利的赏识，给以特别的指导．欧拉同约翰的两个儿子尼古拉·伯努利和丹尼尔·伯努利也结成亲密的朋友．

欧拉19岁时写了一篇关于船桅的论文，获得巴黎科学院的奖金，从此开始了创作生涯．以后陆续得奖多次．1725年丹尼尔兄弟赴俄国，向沙皇喀德林一世（Catherine I，1684？—1727）[4]推荐欧拉．于是欧拉在1727年5月17日来到了彼得堡．

---

〔1〕三角形外心、垂心、重心、九点圆心共线，叫欧拉线．

〔2〕$E+2=V+F$，E、V、F分别是简单多面体的棱、顶点与面的个数．

〔3〕欧拉全集（Leonhardi Euleri Opera Omnia）从1911年起出版．共3辑，第1辑：数学，共29卷，已出齐；第2辑：力学与天文学，共31卷，未出齐；第3辑：物理及其他，共12卷，未出齐．见 C.C. Gillispie, Dictionary of Scientific Biography, vol. Ⅳ (1971) p. 483.

〔4〕彼得大帝（Peter the Great，1672—1725）王后，1725继位为沙皇．

1733年丹尼尔回巴塞尔，欧拉接替他任彼得堡科学院数学教授，时年仅26岁。

1735年，欧拉解决一个天文学的难题（计算彗星轨道），这问题经几个著名的数学家几个月的努力才得解，欧拉却以自己发明的方法，三日而成。但过度的工作使他得了眼病，不幸右眼失明，这时才28岁。

1741年，欧拉应普鲁士腓特烈大帝（Frederick the Great, 1740—1786 在位）的邀请，到柏林担任柏林科学院物理数学所所长。直到1766年，在俄国沙皇喀德林二世（Catherine Ⅱ, 1762—1796 年在位）的诚恳敦聘下重回彼得堡。不料没有多久，左眼视力衰退，只能依稀看到前方物体。最后完全失明。这时欧拉已年近花甲。悲惨的遭遇，丝毫没有停止这位巨人的工作。

不幸的事情接踵而来。1771年彼得堡大火，殃及欧拉住宅，带病而失明的64岁的欧拉被围困在大火中。在这千钧一发的紧急关头，为他做家务的一个工人冒着生命危险，冲进火中把欧拉抢救出来。欧拉的书库及大量研究成果全部化为灰烬。

沉重的打击，仍然没有使欧拉倒下。他发誓要把损失夺回来。欧拉在完全失明之前，还能朦胧地看见东西，他抓紧这最后的时刻，在一块大黑板上疾书他发现的公式，然后口述其内容。由他的学生特别是大儿子A·欧拉（Johann Albrecht Euler, Иван-Альбрехт Эйлер, 1734—1800，也是数学家和物理学家）笔录。欧拉完全失明以后，仍然以惊人的毅力与黑暗搏斗，凭着记忆和心算进行研究，直到逝世，竟达17年之久。

欧拉的记忆力和心算能力是罕见的。他能够复述年青时代

笔记的内容．心算并不限于简单的运算，高等数学一样可以用心算去完成．有一个例子足以说明他的本领．欧拉的两个学生把一个颇复杂的收敛级数的17项加起来，算到第50位数字相差一个单位．欧拉为了确定究竟谁对，用心算进行全部运算，最后把错误找出来．欧拉在黑暗的17年中还解决了使牛顿头疼的月离（月球运行）问题，和很多复杂的分析问题．

当代人称欧拉为“分析的化身”（Analysis Incarnate）．法国天文、物理学家阿拉哥说：“欧拉计算好象一点也不费力，正和人呼吸空气，或者老鹰乘风飞翔一样．”

欧拉的风格是很高的．拉格朗日是稍后于欧拉的大数学家．从19岁起和欧拉通信，讨论等周问题(isoperimetric problem）的一般解法，这引起变分法的诞生．等周问题是欧拉多年来苦心考虑的问题，拉格朗日的解法，博得欧拉的热烈赞扬．1759年10月2日欧拉在回信中盛称拉格朗日的成就，并谦恭地压下自己在这方面较不成熟的作品暂不发表，使年青的拉格朗日的工作得以发表和流传，赢得巨大的声誉．变分法（calculus of variations）一词，1766年为欧拉所创．他对变分法推进的伟大功劳，也是不可埋没的．

欧拉充沛的精力保持到最后一刻．1783年9月18日下午，欧拉为了庆祝他计算气球上升定律的成功，请朋友们吃饭．那时天王星[1]刚发现不久，欧拉写出计算天王星轨道的要领，还和他的孙子逗笑，喝完茶后，突然疾病发作，烟斗从手中落下，口里喃喃地说：“我死了”．欧拉终于“停止了生命和计算”．[2]

〔1〕1781年3月13日为赫歇耳（F. William Herschel, 1738—1822）所发现．

〔2〕“il cessa de calculer et de vivre”，法国数学家康多塞（A.N.C Marquis de Condorcet, 1743—1794）语．

历史学家把欧拉和阿基米德、牛顿、高斯并列为有史以来贡献最大的四位数学家，他们有一个值得注意的共同点，就是在创建纯粹理论的同时，还应用这些数学工具去解决大量天文、物理、力学等方面的实际问题．他们的工作常常是跨学科的．他们不断地从实践中吸取丰富的营养，但又不满足于具体问题的解决，而力图探究宇宙的奥秘，揭示其内在的规律．

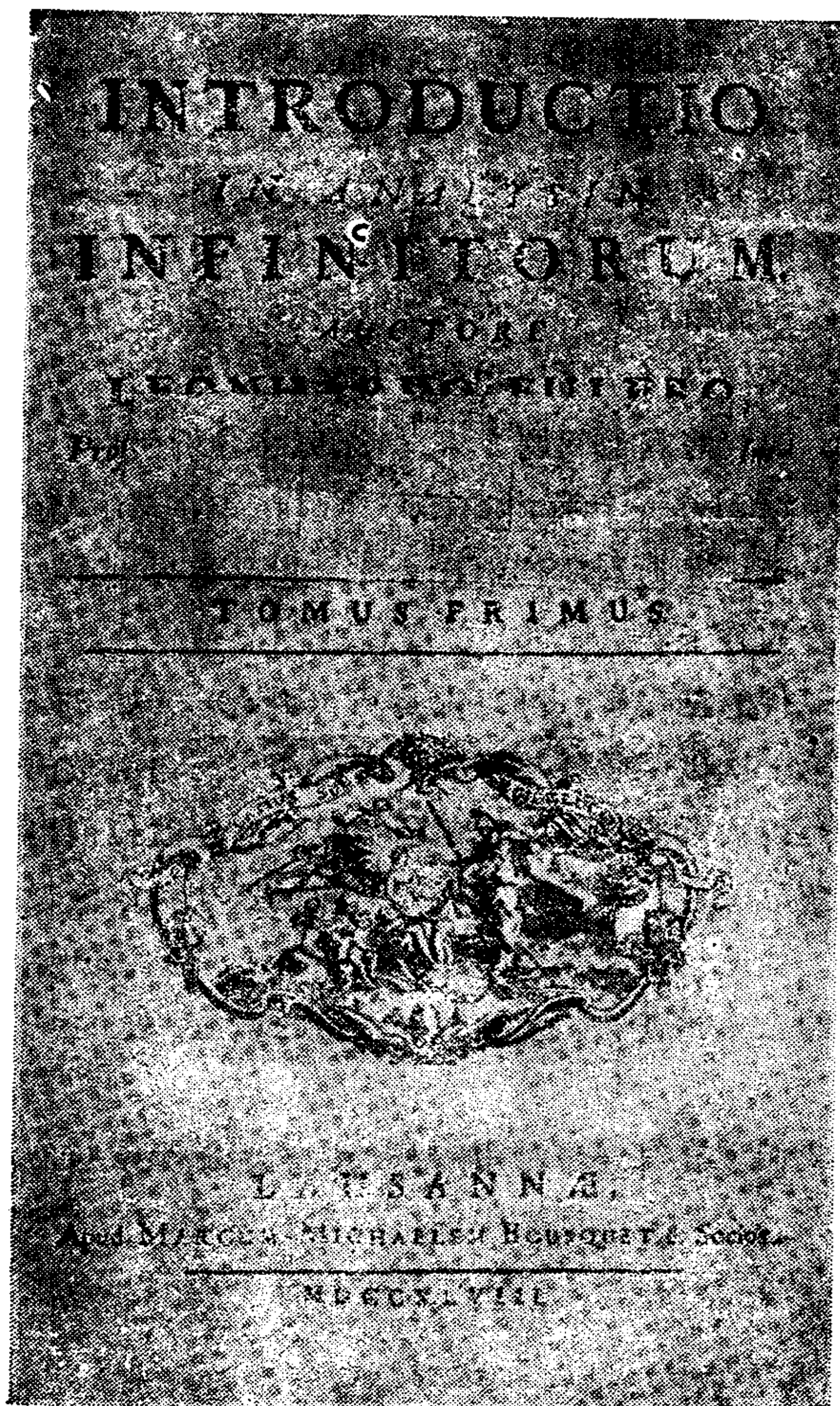
欧拉留给后人丰富的科学遗产中，分析、代数、数论占40%；几何18%；物理和力学28%；天文11%；弹道学、航海科学、建筑等其他问题3%．《无穷小分析引论》（Introductio in analysin infinitorum），1748年在瑞士洛桑（Lausanne）出版，是他划时代的代表作，也是世界上第一本完整的有系统的分析学（图56）．

现代的三角学，可以说是从《引论》开始的．在这里，欧拉第一次以函数线与半径的比值作为三角函数的定义．过去一直是以线段的长作为三角函数定义的．欧拉创用 a、b、c 表示三角形三边，A、B、C 表示对应的三个角，大大简化了三角公式．他还给出三角函数的级数定义．从欧拉开始，研究解三角形的三角学进一步演变成为研究三角函数的一个数学分支[1]．

我们现在有许多常用的符号也是起源于欧拉的．1755年欧拉在《微分学原理》中创用 Σ 来表示求和．[2] 1706年钟斯（William Jones）用 π 表示圆周率．1736年以后，经过欧拉的提

〔1〕欧拉在初等数学方面的创作，参见И．Г．孟尔尼科夫《列奥那尔·欧拉和初等数学》，载《厦门数学通讯》（1958）1期pp.1—20．

〔2〕Florian Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1952) p. 61.


INTRODUCTIO

IN ANALYSIN

INFINITORUM.

AUCTORE

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

图 56 欧拉《无穷小分析引论》的扉页

倡，一直沿用至今。1777年5月5日欧拉在送交彼得堡的一篇论文中用 i 表示 $\sqrt{-1}$，[1] 也是现在常用的符号。用 e 表示自然对数的底也起源于欧拉，1727—1728年的手稿中已开始使用，到1736年正式写在书中。

* *

失明的厄运，在数学史上并不是独一无二的。我国清代嘉定（今属上海市）人时曰醇，对“大衍求一术”深有研究。“晚年目已双瞽（gǔ，瞎），犹能手按珠盘，口授其子，著《百鸡术衍二卷》。”[2] 给后世留下了宝贵的学术遗产。

苏联著名的拓扑学家邦德列雅金（Ле Семёнович Понтрягин, Lev S. Pontrjagin, 1908— ，莫斯科大学教授）中学时代（14岁）由于做化学实验发生严重事故，以致双目失明。后来在他的母亲的帮助下，经过长期的刻苦努力，终于攀登上科学的高峰。[3]

二、牛顿和他的老师巴鲁

巴鲁（Isaac Barrow，1630年10月生于伦敦，1677年5月4日卒于伦敦）是牛顿的老师，也是最早赏识牛顿才能的人。他在1644年进入剑桥大学三一学院，1648年取得学士学位，

---

〔1〕E.T. Bell, The Development of Mathematics (1945) p. 176.

〔2〕华世芳（1854—1905）《近代畴人著述记》（1884），附录于阮元（1764—1849）《畴人传》（1799）。时曰醇（也作淳）传记，又见诸可宝《畴人传三编》（1886）。时曰淳是清道光24年（1844）举人。

〔3〕《苏联大百科全书》34卷（1955）p.149.

Б.В Болгарский, Очерки по истории математики (1979) p. 352.

那时才18岁．后来成为母校的教授和副校长（1675）．巴鲁1664年被选为第一个“路卡斯教授”[1]．

巴鲁写过《数学讲义》（Lectiones Mathematicae, 1683），《几何讲义》（Lectiones geometricae, 1670）等书．在光学、几何、圆锥曲线等方面都有所发明．[2]

具有特别重要意义的是给出求切线的方法，以及引入“微分三角形”的概念，即相当于现代以 dx，dy，ds 为边的直角三角形．不过当时还没有使用“微分三角形”这一名称．假如要通过曲线上某点作切线，只要求出次切距来就可以．这归结为求切线斜率的问题，也就是要求微分三角形两直角边的比．用我们的符号表达，就是 dy/dx．这些学理后来对牛顿有很大的启发．

牛顿（Isaac Newton）1642年12月25日[3] 生于英格兰东海岸中部林肯州（Lincolnshire）的格朗达姆(Grantham) 镇南约13公里的乌尔索浦（Woolsthorpe）[4] 小村子里．1727年

---

〔1〕Lucasian professor，是遵照路卡斯（Henry Lucas,?–1663．6.23）的遗嘱设立的一种荣誉教授职，每年有若干额外的津贴．

〔2〕D.E. Smith, History of Mathematics, vol. Ⅰ(1923) p. 396.

〔3〕这是儒略历（Julian calendar）的日子．1582年罗马教皇格里高利十三世(Gregory XⅢ, 1502—1585）改历，叫做格里历（Gregorian calendar），即现今世界通行的公历．各国开始采用公历的时间不同．中国是辛亥革命以后（1912），苏联是十月革命以后（1918），英、美是1752年．牛顿的生日是儒略历（也叫旧历）圣诞节晨（明崇祯15年闰 11 月 14 日），相当于格里历（新历）1643年 1 月 4 日，所以有的书写的牛顿生年是1643，例如J. Naas, Mathematisches Wörterbuch, Band Ⅰ(1962) p.223.

〔4〕意译为羊毛村． thorpe 是英国的村庄．



牛顿 (Newton)

3月20日[1]凌晨1时许于伦敦的肯星吞(Kensington)区在睡眠中安静地逝世。葬于伦敦西部著名的西敏寺(Westminster Abbey)中。

牛顿的父亲是一个农民，在牛顿出生前便去世了。牛顿是不足月的遗腹子，他是那样的脆弱瘦小，他妈妈说一夸脱(约一升)的杯子就装得下他。他的生命是已经绝望了的，两个到附近为这婴儿取药的妇女心想等不到回来他就死了。谁也没有料想到，他竟活到85岁的高龄，而且是世界上出类拔萃的伟大科学家。

牛顿一直到晚年身体还是很健康的。他一生只掉了一只牙，从来没有戴过眼镜。头发三十岁已变白，但到老没有脱落。[2]

---

〔1〕相当于格里历1727年3月31日。

〔2〕牛顿的传记很多。参考(1) E. T. Bell, Men of Mathematics (1937) pp. 90—116.(2) Encyclopaedia Britannica, vol. 16 (1964) pp.362—365.(3) V. E. Pullin《牛顿传》(Sir Isaac Newton: A Biographical Sketch)，刘盛渠译(1937)。(4) Grove Wilson《科学家奋斗史话》(Great Men of Science) 曾宝施译，(1935) 18章《牛顿》。(5) 潘际垧《牛顿》(1965)。(6) R.Ball

临终时，他很谦逊地说："我不知道世人对我怎样看法，我只觉得自己好象是在海滨游戏的孩子，有时为找到一个光滑的石子或比较美丽的贝壳而高兴，而真理的海洋仍然在我的前面未被发现。"[1]他还说："如果我所见的比笛卡儿远一点，那是因为我站在巨人们肩上的缘故。"[2]

牛顿三岁的时候，母亲再嫁，他由外祖母抚养。牛顿有一个舅父名叫爱司考（Rev. W. Ayscough），他极力主张送牛顿上学。牛顿12岁时由农村小学转入格朗达姆镇学校。起先，他对功课没有兴趣，成绩低劣，被同学瞧不起。某日，一个横蛮无理的同学欺侮他，一脚踢在他的肚子上。那个同学的学业也素在牛顿之上。牛顿在肉体上和精神上都受到极大的痛苦。在这种刺激之下，牛顿回击了他的对手，最后把已经变得懦弱无能的对手鼻子擦在墙上。于是他悟得学问之道，也不过是这样。从此牛顿发愤图强，不久成绩便超过该生，而冠于全班。

《天文家名人传》(Great Astronomers) 陈遵妫译,(1935) pp. 105—133. （7）陈鸿恩等《五十科学伟人》（1944）.（8）牛顿的哲学思想参考H.S. 塞耶《牛顿自然哲学著作选》(Newton's Philosophy of Nature) 译本（1974）.（9）C.C. Gillispie, Dictionary of Scientific Biography, vol.x(1974) pp.42—103.

〔1〕R.J. Spence, Anecdotes, Observations, and Characters of Books and Men (1858) p.40.

〔2〕James Parton, Sir Isaac Newton. 转引自R.E. Moritz, Memorabilia Mathematica (1914) p. 170.

牛顿14岁时，母亲再寡，带着三个孩子重回乌尔索浦故乡。由于生活困难，她让牛顿停学务农。牛顿自从发愤读书之后，向学的意志很坚决。可是为了不使母亲失望，他仍然从镇上回到农村，参加田间劳动。

然而牛顿的兴趣并不在农事，他利用一切空闲时间，继续学习。传说他在放羊的时候，独自在树下专心读书，羊群走散，糟踏了庄稼，他也不知道。牛顿还常常思考大自然的道理，喜欢动手制作各种奇妙的玩具和器械。

母亲最初很失望，后来终于为他的勤奋所感动，在舅父的劝告下，同意他重返格朗达姆学校。1661年6月，牛顿由于成绩优异，考入了剑桥大学三一学院。母校的校长斯特罗克(Henry Strokes)特别召开全体大会表扬了牛顿。

牛顿家境困难，他在剑桥大学是减费生(subsizar)。要从事一定的勤杂劳动，以减免学费。在数学方面，他幸运地得到巴鲁教授的指导。从此在校好学不倦，逐步掌握了笛卡儿《几何学》，刻卜勒的光学和老师巴鲁的《讲义》。他特别爱好瓦里士的《无穷小算术》，瓦里士曲线$(1-x^2)^n$的求积问题，后来导致牛顿二项定理的发现。

1664年，牛顿取得了学士学位。1665年伦敦流行鼠疫，波及剑桥，8月间大学被迫停办。牛顿回到乡下乌尔索浦，这是他一生的重要转折点。牛顿在乡间终日思考各种问题，运用他的智慧和数年来获得的知识，探索大自然的奥秘。牛顿平生的三大发明：流数术（微积分）、万有引力和光的分析，都发轫于1665—1666年间，这时他才23岁。

牛顿看见苹果落地而悟得万有引力的故事，被后人很有兴味地传诵着。牛顿有一个朋友名叫史特克莱，写了一段回忆

录[1]，记述牛顿在逝世前一年和他坐在苹果树下复述当年思考地心引力的情景。苹果为什么总是垂直落到地面上来而不是向别的地方飞去呢？牛顿于是想到一定是地球有一种力吸引着它。

这故事最初记载在伏尔泰（F. M. A. Voltaire, 1694—1778，法国学者）的著作中。据说得自牛顿的外甥女卡特林·巴顿（Catharine Barton），她是牛顿的异父妹汉娜·巴顿（Hannah Barton）的女儿。牛顿晚年时，她替他管理家务。英国人很重视这苹果的故事，后来那棵树倒了，便砍成若干块，作为珍贵的纪念品保存起来。

实际上牛顿是经过很多的计算，才得到这个结论的。他在一份手稿里写道："就在这一年，我开始想把重力伸展到月球的轨道上，……从刻卜勒的定律，行星公转周期的平方与其轨道半径的立方成比例，我推定使行星在轨道上运行的力量必定与到旋转中心的距离的平方成反比。由此我把使月球在轨道上运行的力与地面上的重力相比较，发现它们差不多相密合。这一切都是在瘟疫年1665与1666年间成功的。因为在那些日子里，我正在发明旺盛的时代，对于数学和哲学的热心，比以后任何年代更甚。"[2]

牛顿在这里遇到一个计算上的困难，使万有引力的理论搁置了二十年没有发表出来：如果两个质点间的引力正比于二者质量的乘积，反比于距离的平方，那么由无数个质点积聚起来

〔1〕潘际垌《牛顿》（1965）pp.28—30.

〔2〕这份手稿是汉娜·巴顿的后人朴次茅斯（Portsmouth）在1872年赠给剑桥大学的，见 W.C. Dampier《科学史》李珩译（1975）p. 222.

的两个球体之间的引力应如何计算呢？牛顿当时不能解决。

如果这两个球体相距很远（象两个恒星），那么可以把球当作质点来处理。但相距并不太远（象地球和月亮）的话，就不能看作质点了。这显然牵涉到一个积分问题，在今天看来，虽然并不怎样困难，[1]但在微积分刚刚建立的时代，确是很棘手的。

另一种说法[2]是牛顿所使用的地球大小的数值不精确，所得出的推动月球在轨道上运行的力与重力不合，因此他把计算搁置起来。这一说法不大可信，因为那时已有相当精确的数值，而且牛顿自己说两者是差不多密合的。

1684年，牛顿的朋友哈雷（Edmund Halley，1656.10.29—1742.1.14，天文学家，以发现“哈雷彗星”著称）为一个问题所苦：什么样的引力定律使行星的运行成椭圆轨道呢？这已在伦敦皇家学会大辩论了很久不得要领。哈雷跑到三一学院问牛顿，牛顿马上回答说是反平方定律。哈雷又问他是怎样知道的，原来牛顿在两年前已经计算出来，从而确立了万有引力定律。

1666年，牛顿用三棱镜来实验有名的光的色散现象，把白色的日光分解成红、橙、黄、绿、青、蓝、紫七种颜色。[3]后来他用过相当于一条光线行进道路的微分方程来计算通过空气时所产生折射的表。1668年，牛顿为了避免折射望远镜的色象

〔1〕用一个简单的三重积分就可以解决。

〔2〕出自牛顿的朋友彭伯顿（Pemberton）。见 W.C. Dampier《科学史》译本 p.223.

〔3〕在牛顿之前，已有色散现象的各种理论和实验。牛顿把这些实验加以扩大，为光谱学开辟了道路。

差，发明并亲手制作了第一具反射望远镜．仅此一项，就足以使牛顿名垂青史．牛顿在光学方面还做了很多工作，他的第一次讲学和第一篇论文都是关于光学的．1692年发生一件不幸的事，牛顿某晚外出没熄灭蜡烛，也许是他的爱犬碰到蜡烛，把他的著作包括二十年来的光学研究手稿化为灰烬．[1]

在数学方面，牛顿划时代的贡献是微积分的创建．1665年5月20日[2]牛顿的手稿中开始有“流数术”的记载．微积分的始创，不妨以这一天为标志．

“流数术”长久没有人知道，一直到1687年才以几何的形式摘记在他的巨著《自然哲学之数学原理》（Philosophiae naturalis principia mathematica）中．

牛顿的数学和光学的研究，得力于他的老师巴鲁的地方甚多．巴鲁的“微分三角形”的深刻思想，给牛顿极大的影响．1667年瘟疫过去，牛顿从家乡回到剑桥．又经过两年的努力，他的学识达到了一个新的水平．他协助巴鲁编写讲义，撰写微积分和光学的论文，得到巴鲁的高度评价．

1669年，巴鲁坦然宣称牛顿的学识已经超过自己．当年10月将“路卡斯教授”的职位让给牛顿，一时传为佳话．牛顿时年仅26岁．现在三一学院牛顿雕像之北，立有巴鲁的雕像，为后世所景仰．

牛顿1696年（53岁）被任命为造币厂监督，1699年成为厂长．1703年被选为皇家学会主席，直到1727年逝世．1705年受

〔1〕传说他回来后无可奈何地对小狗说：“钻石，钻石！你一点也不知道你已经开了我一个多大的玩笑！”

〔2〕格里历5月31日．F. Cajori, A History of Mathematical Notations, vol. I (1929) p. 197.



巴鲁 (Barrow)

安娜女王 (Queen Anne, 1665—1714) 封为爵士[1]。

牛顿晚年致力于哲学和公务，对科学甚少贡献。不过他的数学思想仍旧和以前一样敏锐，实验的兴趣也不减当年。1696年约翰·伯努利拟定两个困难得可怕的问题，向全欧洲数学家挑战。第一个是在今天还具有重大意义的“最速降线”问题。

六个月的时间，全欧的数学家都挫败了。问题于是又重新提出来。1697年1月29日，牛顿从朋友那里听到这个消息，那天他正从造币厂回来，非常疲倦。饭后，他便把两个问题都解决了。后来他隐匿姓名（大概是为了避免引起纠纷）寄给皇家学会。当伯努利看到这个解答时，惊叫道：“啊！我认出了狮子用它的巨爪。”[2]

关于牛顿的轶事是很多的，不过多半不真实。1692年，火烧掉他的手稿后，他害了一场病，心神恍惚，也有可能发生一些心不在焉的笑话。

---

〔1〕女王和王子特地步行到剑桥参加授爵典礼，以示重视。Denham Larrett《算学的故事》(Story of Mathematics) 徐韫知译，(1933) p.63.

〔2〕E.T. Bell, Men of Mathematics (1937) p.115. 后来莱布尼兹、欧拉、洛彼塔等人也都解出了“最速降线”问题。

另一方面，由于牛顿的伟大创造，人们常把牛顿偶象化，加以神话式的颂扬，这也是不切合实际的．最突出的例子是英国诗人浦普（Alexander Pope，1688—1744）的诗句[1]：

“宇宙和自然的规律隐藏在黑夜里，

神说：‘让牛顿降生吧！’

一切都是光明。”

这是诗人的幻想．夸大牛顿的天才到神化的程度，而忽略了他长期刻苦努力的一面是错误的．

三、高斯和小行星的发现

高斯（Carl Friedrich Gauss）1777年4月30日生于德国的布伦兹维克（Braunschweig），1855年2月23日卒于格廷根（Göttingen），是近代数学伟大的奠基者之一．[2] 他在历史上影响之大，可以和阿基米德、牛顿、欧拉并列．

---

〔1〕A. Pope, Epitaph intended for Sir Isaac Newton. 转引自R.E. Moritz, Memorabilia Mathematica (1914) p. 167.

〔2〕传记参考（1）E. T. Bell, Men of Mathematics (1937) pp. 218—269. （2）F.Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19.Jahrhundert (1926), pp. 6—62, 评述高斯的工作甚详. （3）Г. В. Багратуни，《卡·弗·高斯》（Карл Фридрих Гаусс),许厚泽、王广运译 (1957)．（4）Ian Stewart《数学家高斯》，载《科学》(Scientific American) (1978) 1期, pp. 78—88. （5）И.Г. 巴士玛柯娃《卡尔·费里德里赫·高斯》，载《数学通讯》(1955. 9) pp. 27—29. （6）高木贞治《近世数学史谈及杂谈》(1938) pp. 1—53. （7）C. C. Gillispie, Dictionary of Scientific Biography, Vol. V(1972) pp. 298—315.

高斯出生在一个贫苦的家庭里．祖父是农民，父亲做短工．舅舅腓特烈（Friederich）是一个很有才能的人，自己学会了纺织技术，很快成为一个出色的锦缎织工．他经常教给高斯一些知识，对幼年的高斯影响很大．

高斯父亲本不打算让他上学，但高斯很小就显出有数学才能．一个星期六的晚上，他父亲计算工薪帐目，没注意到小高斯在旁边看着．他算了半天才完，不料高斯说："爸爸，你算错了，应该是……．"核对一下，果然是高斯说得对，父亲又惊又喜．七岁的时候，决定送他上学．

高斯10岁的时候，数学教师布特纳（Büttner）要求学生将100个数相加起来，这100个数恰好成等差数列（如1＋2＋3＋…＋100之类）．刚解释完题目，高斯就把有答案的石板交上去．布特纳连看也没看，心想这个全班最小的学生准是瞎写了些什么或者交了白卷．过了很久，别的学生才一个个把石板叠在上面．等到布特纳发现高斯的石板上只写着一个正确的答案而比他大的孩子都算错了的时候，才大吃一惊．在这以前，他从未教过学生计算等差数列．

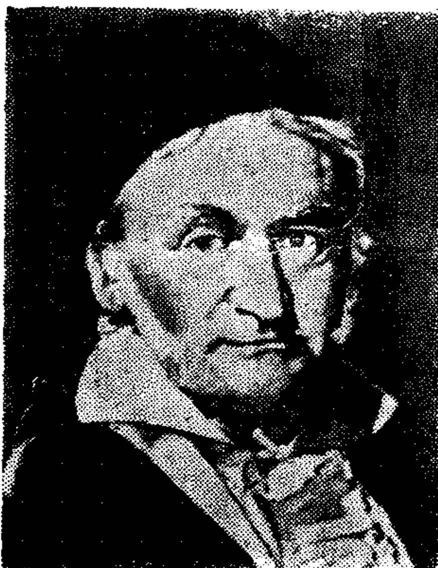
有经验的布特纳立刻意识到这是一件不寻常的事．他买了一本最好的算术书送给高斯，并说："他已超过我，我已经没有什么可以教他的了．"

高斯仍然留在小学里，教师的助手巴特尔斯（Johann Martin Bartels，1769—1836）是一个好学的十七岁青年，他同高斯一起学习了很多数学．巴特尔斯后来主持喀山大学的数学讲座，著名的罗巴契夫斯基是他的学生．

由于巴特尔斯的推荐，高斯得到一个公爵的资助，在1795年进了格廷根大学．



高斯（Gauss）青年时



高斯老年时

1796年高斯（19岁）发现正十七边的尺规作图法，这是欧几里得以来悬而未决的问题。为了纪念这个发现，格廷根大学在高斯去世后，为他建立了一个以正十七边形棱柱为底座的纪念像。

1781年以前，人们只知道有五大行星：水、金、火、木、土。1766年提替斯（J.D.Titius，1729—1796）总结出这样的经验公式：设地球与太阳的平均距离（即一个天文单位）是10，那么各行星与太阳的距离是：[1]

水星 $4=4+0$ (3.9)

金星 $7=4+3$ (7.2)

地球 $10=4+6$ (10)

〔1〕这是稍加修改的写法，原来以地、日距离为1．参考 Gérard de Vaucouleurs，《天文学简史》，李晓舫译，P．56． R. H. Baker, Astronomy (1947) p. 154.

火星	16 = 4 + 12	(15.2)
(?)	28 = 4 + 24	(?)
木星	52 = 4 + 48	(52.0)
土星	100 = 4 + 96	(95.4)

括号内是实际距离，它和左边计算出来的数字很接近．左边的数字是用数列 0，3，6，12，…加上 4 得出来的，这数列除去第一项后，每一项都是前一项的 2 倍．

1772年德国天文学家波德（Johann Elert Bode，1747.1.19—1826.11.23，柏林天文台台长）加以整理后发表，现在叫做“波德定律”．

这一简单关系虽然是数字的凑合，没有理论根据，但还是引起了天文学家的极大注意．大家都认为在相当于28那个空档里，可能有一个未发现的行星．

1781年3月13日赫歇耳（Frederick William Herschel，1738.11.15—1822.8.25）发现土星之外还有一个行星，以后定名为天王星．它和太阳的距离是192，和波德定律的计算结果196很接近．这更加强了寻找新行星的信心和决心．但辛辛苦苦找了二十年都没有结果，却在一次偶然的观测中发现了．正是：踏破铁鞋无觅处，得来全不费功夫．

19世纪的第一个晚上（1801.1.1），皮亚齐（Giuseppe Piazzi，1746.7.16—1826.7.22）在意大利西西里岛的巴勒莫（Palermo）天文台为了核对星图，观察金牛座一带的星，偶然看到一颗 8 等星和星图不合．第二夜发现已向西移动，他以为这是一个没有尾巴的彗星．连续观测了四十天，一直到 2 月11日，终于因为劳累过度病倒了．

他将观测结果写信告诉欧洲大陆的天文学家．那时正值

拿破仑远征埃及，英国舰队封锁了地中海。直到1801年9月，大陆上的天文学家才知道这件事，引起很大的震动。但那时这颗星已被阳光所掩，无法寻找，似乎它已在无数群星之间永远消逝了。

于是产生一个难题，怎样根据极有限的观测数据来确定新行星的轨道？当时许多著名的天文学家都着手解决这个问题，但都失败了。

孙悟空十万八千里的筋斗，跳不过如来佛的手心，行星的怪异运动，也终于逃不出数学家的掌握。24岁的高斯，经过几星期的努力，克服了种种困难，创立了行星椭圆轨道法，成功地解决了这个问题。这导致一个8次方程。

另一个天文学家查赫（Baron von Zach，1754—1832）根据高斯的方法，造了一个觅星表，预报这颗星的位置。可是天公不作美，连日阴雨，无法观测。直到这一年的除夕，天气大晴，天文学家在预测的位置上，重新找到了这颗星。[1] 这是科学的辉煌胜利，它显示了数学理论的巨大威力。

这颗星定名为谷神星（Ceres），与太阳距离27.7，和波德定律大致相符。然而事情还没有结束，谷神星的直径只有770公里，是地球的6％，木星的0.55％，在火星与木星之间，大小太不相称。

以后又在这个空隙里陆续发现了许多小星，这些星现在叫做小行星。被发现的小行星的数目越来越多。最初用神的名字命名，神的名字不够用，就用人名、国名等来命名。目前正式

〔1〕龚树模《小行星》，载《宇宙》（1947，1—6）第17卷1—6号pp.4—8. 张钰哲《小行星漫谈》（1977）.

编号的已达两千颗之多。[1]

高斯后来总结了这种方法，写成《天体沿圆锥曲线绕日运动的理论》（Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, 1809）. 在这书中他首次叙述了最小二乘法原理.[2]这对测量学有重要意义. 高斯是大地测量卓越的理论家和实践者.

高斯对电磁学、光学的贡献并不亚于天文学和大地测量. 1833年他和韦伯（Wilhelm Eduard Weber, 1804. 10.24—1891.6.23）共同发明了电磁电报. 后来为了纪念高斯，磁通量密度的单位以高斯命名.

1827年高斯出版《曲面的一般研究》（Disquisitiones generales circa superficies curvas），继欧拉、蒙日之后将微分几何大大推进一步，并决定了这一学科发展的基本方向.

高斯在1816年左右就得到非欧几何的原理，[3]但他从未发表过这方面的著作. 高斯知多言少，他一生虽然发表了155篇论文，但还有大量创作没有发表出来. 例如他曾深入研究了复变函数，发现解析函数沿闭曲线的积分为0，但没有发表. 后来为柯西重新得到.

---

〔1〕堂堂中华民族，是否有人用中华来命名小行星呢？我国天文学家张钰哲1928年在美国叶凯士（Yerkes）天文台工作时，曾发现1125号小行星，命名为中华（China），以表示对祖国的怀念. 后来"中华"失踪，不知去向. 直到解放后，我国天文事业获得了迅速的发展. 1957年在南京紫金山天文台上重新找到了"中华"，从此中华之名将与日月并存. 见张钰哲《天文学论丛》（1933）p. 10. 《光明日报》（1962.11.21）《张钰哲和小行星》.

〔2〕1806年勒让德较早发表最小二乘法. 但高斯在1794年已开始使用.

〔3〕见本书第九章第三节. p. 235.

高斯总是等到作品十分成熟的时候才公布出来。呈现在人们面前的只是完美无瑕的结果，而省略了分析和思考的过程，一般的学者很难掌握他的思想方法。

有些学者对于高斯的过份拘谨有些看法。他们认为如果具有洞察力的高斯及早发表他的真知灼见，对后辈会有更大的启发，进入新的领域也就更快。

在纯粹数学方面，高斯对数论最感兴趣。他在19岁时就发现并证明了二次互反律（quadratic reciprocity law）。这是他的得意杰作，称之为“黄金律”，（theorema aureum），一生曾用八种方法去证明它。[1]高斯的数论研究总结在《算术探究》（Disquisitiones Arithmeticae, 1801）中。这书奠定了近代数论的基础，它不但是数论方面的划时代著作，而且可以列为历史上最有代表性的数学著作之一。

高斯曾说：“数学是科学之王，数论是数学之王（Mathematics is the queen of the sciences and arithmetic the queen of mathematics）。它常常屈尊去为天文学和其它自然科学效劳，但在所有的关系中，它都堪称第一。”[2]

前两句话常被引用，第一句是容易解释的，第二句仅仅说明高斯对数论的偏爱。

---

〔1〕D.E.Smith, A Source Book in Mathematics, vol. I (1959) p. 112. 1783年欧拉提出这个定律而没有证明，1785年勒让德证明但不完整。

〔2〕Sartorius von Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss (1856) p. 79, 转引自 Robert Edouard Moritz, Memorabilia Mathematica (1914) p. 271. “queen”有三种译法：皇后，女王，王。在解释上略有差异，皇后是美的象征，指数论的定理非常优美。王与女王的意义相同，指其高贵。根据上下文及我国习惯，译为王似较符合原意。

四、费马大定理、希耳伯特问题、哥德巴赫猜想



费马 (Fermat)

费马是一个业余的数学爱好者，利用公务之余钻研数学．他在数论、解析几何、概率论等方面都有重大贡献，被誉为“业余数学家之王”[1]．

费马的性情好静，生前很少发表著作．去世后，人们才收集他写在书页空白处，给朋友的书信中和一些陈旧手稿中的论述编成书．他特别爱好数论，在这方面他有好几条定理，而最有名的莫过于“费马大定理”（Großer Fermatscher Satz）[2]了．

---

[1] E.T.Bell, Men of mathematics (1937) p. 56.

[2] 这定理也叫“费马猜想”（Fermatsche Vermutung），见 J.Naas, H.L.Schmid, Mathematisches Wörterbuch (1962) p. 531. 或“费马问题”（フエルマの问题，problème de Fermat, Fermatsches Problem），见日本岩波《数学辞典》(1954) p. 87. 但更多地称为“费马最后定理”（Fermat's last theorem）．我国称为大定理的较普遍．

用现代的术语来说是：

不可能有满足 $x^n+y^n=z^n$，$xyz\neq 0$，$n>2$ 的整数 x,y,z,n 存在。

我国早在商高时代（约公元前1100年）就已经知道不定方程

$$x^2+y^2=z^2$$

至少有一组正整数解 $x=3$，$y=4$，$z=5$。

希腊的丢番图求得一般的解答：$x=2mn$，$y=m^2-n^2$，$z=m^2+n^2$，其中m，n（$m>n$）是任意正整数。

如果指数 $n>2$，$x^n+y^n=z^n$ 有没有正整数解呢？费马认为没有。

丢番图的《算术》拉丁文译本出现于1621年。1637年左右，费马在巴切（Bachet）校订的《丢番图》第2卷第8命题："将一个平方数分为两个平方数"旁边写道："将一个立方数分为两个立方数，一个四次幂分为两个四次幂，或者一般地将一个高于二次的幂分为两个同次的幂，这是不可能的。关于此，我确信已发现一种美妙的证法，可惜这里空白的地方太小，写不下。"（Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet）[1]

〔1〕原文为拉丁文，见Trygve Nagell, Introduction to Number Theory (1951) P. 252. 英译文见 D. E. Smith, A Source Book in Mathematics (1959) p. 213.

费马死后，怎么也找不着这定理的证明．于是激发起许多数学家的兴趣．欧拉、勒让德、高斯、阿贝耳、狄利克雷、柯西和库麦等大数学家都试证过，也没有得到普遍的证明．

布鲁塞尔和巴黎科学院曾设奖金悬赏数次，也得不到结果．[1] 最后，1908年，数学家佛尔夫斯克尔〔F.Paul Wolfskehl，达木士塔（Darmstadt）地方的人〕在格廷根皇家科学会悬赏十万马克，赠给最先证明这个定理的人．到现在又过了大半个世纪，费马大定理依然没有得到完全的证明．

这定理可以简化一下．如果定理对于某一个 n 是真的，那么对 n 的任何倍数 mn 也是真的．因为假设

$$x^n+y^n=z^n \tag{1}$$

没有正整数解．将

$$x^{mn}+y^{mn}=z^{mn} \tag{2}$$

写成

$$(x^m)^n+(y^m)^n=(z^m)^n, \tag{3}$$

如果（2）有正整数解 x，y，z，那么正整数x^m，y^m，z^m 就应该满足（3），这与（1）无正整数解矛盾．

又任何一个大于2的正整数如果不被4整除，就一定被某一个奇素数整除．因此只要证明 $n=4$ 时以及 n 是任一个奇素数 p 时定理成立，那么定理就对任何的正整数 n 成立．[2]

$n=3$ 的情形在972年阿拉伯人阿尔柯但弟（Alkhodjandi）已经知道，但他的证明有缺陷．欧拉首先证明了这一特例

〔1〕L. J. Mordell, Three Lectures on Fermat's Last Theorem (1920) p.1.

〔2〕参考陈景润《初等数论》（1978）p. 68.

(1770)，不过不很完全．$n=4$ 的情形已由莱布尼兹（在1678.12的手稿中）和欧拉解决．勒让德（1823）和狄力克雷（1825）证明 $n=5$ 的情形．拉美（Grabriel Lamé，1795.7.22—1870.5.1）证明 $n=7$ 的情形（1840）．

这问题的研究成就最大的要算库麦(Ernst Eduard Kummer，1810.1.29—1893.5.14，德国人）了．他虽然没有完全解决费马问题，却因此创立了也许比费马定理本身还要重要的理想数论（1844）．这使得他证明了费马大定理当 $p<100$ 时都成立，除了 $p=37,59,67$ 这三个数而外．为了摈除这三个例外，他在1857年又作了一些补充证明，可惜仍然有一些缺点．$p=37$ 的场合到1892米里曼诺夫（Dimitry Mirimanoff，1861—1945)才完全解决．[1]

以后 p 的数目有很大的推进．1944年谢尔弗力基（J.L.Selfridge），尼可（C.A.Nicol）及凡第弗（H.S.Vandiver）证明当 $p<4002$ 时 $x^p+y^p=z^p$ 没有正整数解．[2]

如果限制 x,y,z 都与 p 互素，问题便比较容易．1909年外斐力什（Wieferich）证明只有当 $2^{p-1}\equiv1\ (\mathrm{mod}\,p^2)$ 时才可能有这种类型的解．但适合这种条件的 p 非常少，在2000以下的只有一个 $p=1093$（$2^{1092}-1$ 被 1093^2 整除）．后来更进一步证明了当 $p<253,747,889$ 时 $x^p+y^p=z^p$ 的确没有这种类型的解〔D.

〔1〕L.J.Mordell, Three Lectures on Fermat's Last Theorem (1920) p.21. Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972) p.820. 详细讨论见Leonard Eugene Dickson, History of the Theory of Numbers, vol.2 (1952) pp.731—776.

〔2〕Proc. Nat. Acad. Sci. USA 41,970—973(1944).

H. 雷麦 (Derrick Henry Lehmer), E. 雷麦 (Emma Lehmer)，1941〕. [1]

近年来 p 的数字又有所推进. 瓦格斯塔夫 (Samuel S. Wagstaff) 最近在大型计算机的帮助下证明当2＜p＜125, 000时 $x^p+y^p=z^p$ 无正整数解. [2]换句话说，只要 n 含有从 2 到 125,000之间的任一个因子， $x^n+y^n=z^n$ 就一定没有正整数解. 尽管如此，费马大定理仍然没有获得普遍证明.

三百多年的热烈探讨，都没有成功，究竟费马有没有证明他自己的命题呢？我们猜想实际情况是“智者千虑，必有一失”.

希耳伯特 (David Hilbert, 1862.1.23—1943.2.14)[3]是本世纪贡献最大的数学家之一，他在1900年巴黎国际数学家大会上发表著名的演讲，提出23个尚待解决的问题. [4]

他一开头就说：“揭开隐藏着未来的面纱，看一看今后科学的进步和在未来世纪中发展的秘密，谁不高兴呢？”

以后这23个问题被称为“希耳伯特问题”. 它好象是通向

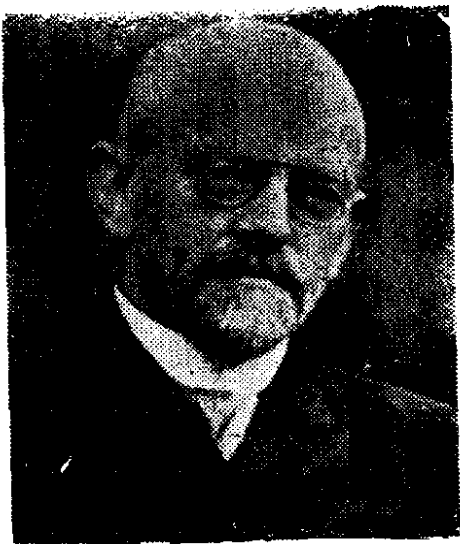
---

〔1〕G.H.Hardy, E.M.Wright, An Introduction to the Theory of Numbers (1945) p.202.

〔2〕Harold M.Edwards, Fermat's Last Theorem, A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory, (1977). 并见同一作者Fermat's Last Theorem, Scientific American (1978.10) pp. 104—122.

〔3〕德国人，工作在哥尼斯堡、格廷根. 在代数数论、代数不变式论、几何基础、积分方程、数学物理方法等方面都有重大贡献.

〔4〕D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, Band Ⅲ (1935) pp. 290—329, Mathematische Probleme. 另见 Felix E. Browder, Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems (1974).



希耳伯特（Hilbert）

未来的窗子，从中可以隐约看到数学未来的情况，其重要性也就在此。后来这些问题成为许多数学家奋斗的目标。直到现在，这23个问题也还没有完全解决，它仍然是数学界注意的焦点之一。

希耳伯特选择这些问题，都是相当难的，正因为如此，才能诱人作出更大的努力。但它又不是完全不可接近的，否则会浪费精力而一无所得。它将是隐藏真理的纷乱道路上的指路标。问题的最终解决会留下人们愉快的记忆。

希耳伯特没有把费马大定理列入23个问题之中．但却把它作为一个典型例子，说明追求一个难题的解决往往使人闯入新的领域里去。

希耳伯特的第8问题是"素数问题"（Primzahlprobleme）．首先是黎曼猜想．[1] 希耳伯特写道：

"将黎曼的素数公式彻底讨论清楚以后，也许我们就有能力去严格地解决哥德巴赫问题[2]了．……以及相差2的素数对[3]是否有无穷多的问题．甚至更一般的问题：线性丢番图方

〔1〕本书第十一章第三节．p. 291．

〔2〕即"哥德巴赫猜想"（Goldbachsche Vermutung）．

〔3〕即"孪生素数"（prime twins）问题．

程（系数是两两互素的整数）

$$ax+by+c=0$$

是否常有素数解 x，y?”

哥德巴赫（Christian Goldbach, 1690.3.18—1764.11.20）[1] 常和欧拉通信讨论问题.[2] 在信中提出这样的猜想：每一个大于2的偶数都是两个素数的和.[3] 例如 $4=2+2$，$6=3+3$，$48=29+19$，$100=97+3$ 等等.

欧拉在1742.6.30的回信中说他相信这个猜想，但他不能证明. 欧拉是当时首屈一指的数学家，这个问题的叙述如此简单，而欧拉却不能证明，这引起了大家的注意. 历代许多数学家都试探过，但直到今天，还没有人能完全证明这个命题. 这就是著名的“哥德巴赫猜想”.[4]

1770年华林（Edward Waring, 1734—1798）才将哥德

---

〔1〕俄文拼法Христиан Гольдбах. 生于哥尼斯堡（Königsberg, 原属普鲁士，现为苏联的加里宁格勒），卒于莫斯科. 传记见 C.C.Gillispie, Dictionary of Scientific Biography, vol. 5 (1972) pp. 448—451.

〔2〕1729年在莫斯科时开始与欧拉通信，直到1763年. 这些信到1843年才由富斯（P.H.Fuss）整理发表出来.

〔3〕详细的历史见L.E.Dickson, History of the Theory of Numbers, vol. Ⅰ (1952) p. 421.

〔4〕参考（1）华罗庚《素数论选谈》，载《中国数学杂志》（1951.11）1卷1期，pp. 3—4.（2）华罗庚《苏联数学家对数学上著名问题的贡献》，载《科学通报》（1950.6）1卷2期，pp. 69—72.（3）王元《谈谈“哥德巴赫”问题》，载《数学通报》（1964.1）pp. 36—39.（4）王元《关于哥德巴赫猜想》，载《光明日报》（1978.8.18）（5）末纲恕一《Goldbach の问题》（1934）.（6）《数学进展》（1955）1卷1期 pp. 102—103越民义《译者赘言》.

巴赫的命题发表出来，并加上“每一个奇数或者是素数或者是三个素数的和”的命题．稍加改变的提法是“每一个≥ 9 的奇数都是三个奇素数的和”，这是哥德巴赫猜想的推论．

这个猜想的困难程度，可以从下面的事实看出．黎曼猜想是著名的难题，但希耳伯特认为哥德巴赫猜想的解决应在黎曼猜想之后．1912年兰道(Edmund Landau,1877.2.14—1938.2.19）在英国剑桥另一次国际数学会议上指出，有四个数论上的问题以当时的科学水平来说是不能解决的，其中一个是哥德巴赫猜想，另一个是孪生素数问题．

所谓孪生素数，就是素数常常成对出现，两者相差 2．如 3,5；17,19；41,43；89,91；999999999959,999999999961；等等．问题是这种相差 2 的素数对是否无穷多？

1849年，波林那克（A.de Polignac）猜想相差 2 的素数对无穷多，相差一个偶常数的素数对也无穷多．[1]

兰道还指出，不用说哥德巴赫猜想了，就是证明“存在一个正整数 C，使得每一个正整数都可以表示为不超过 C 个素数的和”这个较弱的命题，也是现代数学家力所不能及的．

事情出乎意外，1930 年苏联希尼莱曼（Лев Генрихович Шнирельман, Lew Genrichowitsch Schnirelmann, 1905.1.2—1938.9.24）证明了兰道的命题．

1937年，苏联维诺格拉多夫（Иван Матвеевич Виноградов, I.M.Vinogradoff）证明了“充分大的奇数可以表示为 3 个素数之和”（哥德巴赫猜想的推论）．由此推出每一个

〔1〕L.E.Dickson, History fo the Theory of Numbers, vol. I (1952) p. 424.

充分大的正整数都是4个素数之和。

1938年，我国著名数学家华罗庚证明“几乎全体偶整数都能表成两个素数之和。”[1]换句话说，任取一个偶数，它能表示成两个素数之和的概率是1。

1966年，我国青年数学家陈景润证明了“每一个充分大的偶数都能够表示为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和。”[2]这命题简记作（1＋2）。1973年，发表了全部详细论证，[3]同时又证明了“对于任意偶数 h，都存在无限多个素数 p，使得 $p+h$ 的素因子的个数不超过2个。”这一命题十分接近孪生素数问题的解，而前一问题接近哥德巴赫猜想的解。[4]

费马大定理、希耳伯特第8问题（包括哥德巴赫猜想）的彻底解决，还有待数学家的努力。

五、孙膑与对策论

二次大战前后，由于军事上的需要，出现了对策论（theory

---

〔1〕华罗庚(L.K.Hua), Some results in the additive prime number theory, Quart.J.Math., Oxford, 9,68—80,(1938).

〔2〕提要发表于《科学通报》（1966.5.15）17卷9期pp. 385—386.

〔3〕陈景润《大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和》，载《中国科学》（1973）2期 pp. 111—128.

〔4〕哈勃斯丹（H.Halberstam，英国人），李查特(H.E.Richert，西德人)的《筛法》(Sieve Methods) 1974年在伦敦出版。第11章(最后一章)是“陈氏定理”(Chen's Theorem)。绪言中说：“我们这一章的目的是要证明陈景润卓越的成果，这是在前10章行将付印之际，才引起我们注意的。无论如何，它构成筛法理论光辉的顶点（splendid climax）。”p. 320.

of games)．[1] 它是一门研究斗争的数学．查阅历史，对策论的始祖却是我国著名的军事学家孙膑．膑（bìn）本不是他的名字，是古代一种刑法，去掉膝盖骨，使人不能行走．

孙膑的《孙膑兵法》和春秋末期杰出军事家孙武的《孙子兵法》同是历史上著名的兵法．后来《孙膑兵法》失传，引起很多争论．有的人认为两者是一回事，也有的认为根本没有《孙膑兵法》这部书．

1972年4月，在山东临沂银雀山的一座西汉的墓葬中同时发现了这两部兵法，于是真相大白．[2]

孙膑（约公元前360—330年）是战国时齐（在今山东一带）人，是孙武的后代．他曾与庞涓一起学兵法．后来庞涓在魏国（在今河南北部和山西西南部）当了将军，“自以为能不及孙膑”，把孙膑骗到魏，借故施以膑刑，所以名叫膑，并加以监禁．后来孙膑在齐国使臣的帮助下逃回齐国．齐将田忌收容他做门客．

田忌常和齐威王（公元前?—320年．公元前356—320年在位）及诸公子以赛马赌博．田忌的马有上、中、下三等，齐王也有上、中、下三等马，但每一等都比田忌的好．看来田忌很难取胜．孙膑对田忌说：“你尽管同他赛，我有办法让你赢．”

每次比赛以千金为赌注．王出上马，孙膑令田忌出下马，这样输了一场．王出中马，田忌出上马，赢了一场；王出下马，田忌出中马，又赢一场．结果输一场，赢两场，“卒得王千金”．

---

〔1〕本书第十二章第一节．p.298．

〔2〕《孙膑兵法，银雀山汉墓竹简》（1975）．

详细分析敌我情况（“知己知彼”），采取适当的对策，使劣势变成优势，卒以取胜，这就是对策论的思想。

田忌以次等马出赛，竟取得胜利，这使齐威王大为惊讶。于是田忌向齐威王推荐孙膑。齐威王任命他为军师。[1]

公元前353年，魏国围攻赵国都城邯郸（今属河北），赵求救于齐。齐王命田忌、孙膑率军往救。孙膑以魏国精锐部队在赵，内部空虚，乃“引兵疾走大梁”（魏国都城，今河南开封），迫使魏军回救本国。齐军乘魏军疲惫，在桂陵（今河南长垣西）发动猛攻，获得大胜，于是解了赵围。这就是历史上有名的“围魏救赵”的桂陵之战。

公元前342年，魏又攻韩（河南西北部和陕西东部一带），韩向齐求救。齐再次令田忌、孙膑起兵攻魏。孙膑以逐日减灶的计策制造齐军大量逃亡的假象。魏将庞涓受其迷惑，弃其辎重，兼程追击齐军。孙膑估计某日黄昏魏军追到马陵（今河北大名东南）险要地区。在那里设下埋伏圈，刮去大树的皮，写上“庞涓死于此树之下”．命令射手晚上看见火光而发射。庞涓果然在天黑时到达，点火看字。这时万弩俱发，魏军大乱。庞涓智穷兵败，自杀而死。

这是《史记·孙子吴起列传》的说法。在另一个地方《魏世家》说庞涓被杀。但按出土的《孙膑兵法》，说庞涓在桂陵之战时已被活捉。总之，庞涓以失败而告终。

我国古代的兵法，含有许多对策论的思想。

---

〔1〕司马迁《史记》卷六十五《孙子吴起列传》。

六、蜂房问题

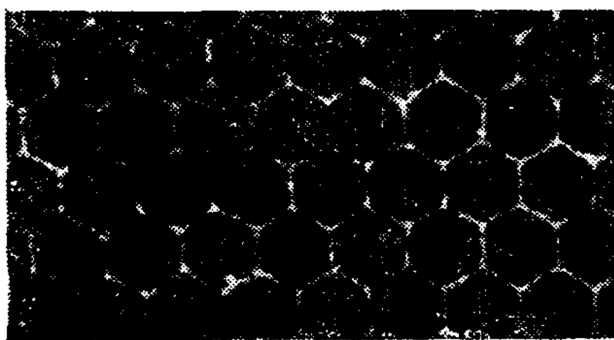


图 57

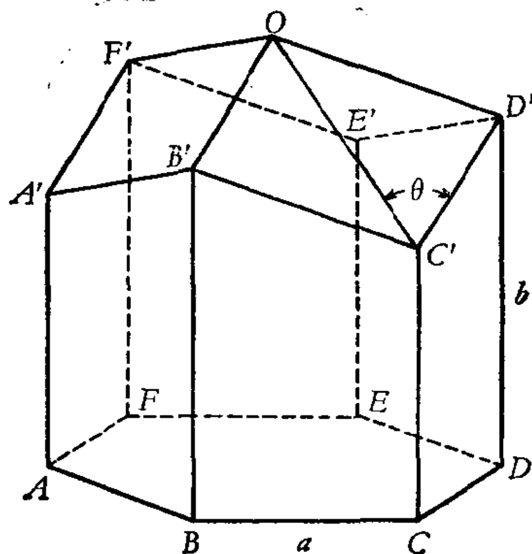


图 58

早在公元300年前后，亚历山大的巴普士就研究过蜜蜂房的形状，他认为六棱柱的巢是最经济的结构。[1]

从外表看，许许多多的正六边形的洞完全铺满了一个平面区域(图57)。每一个洞是一个六棱柱的巢的入口。

在这些六棱柱的背面，同样有许多形状相同的洞。如果一组洞开口朝南，那么另一组洞的开口就朝北。这两组洞彼此不相通，中间是用蜡板隔开的。[2] 奇特的地方是这些隔板是许多大小相同的菱形组成

〔1〕T.Heath, A History of Greek Mathematics, vol. Ⅰ(1921) p. 389. 又本书第五章第四节. p. 128.

〔2〕参考华罗庚《数学的用场与发展》，载《现代科学技术简介》(1978) p. 217“生物之谜”. 又华罗庚《谈谈与蜂房结构有关的数学问题》(1979).

的.

取一个巢来看，形状如图58所示．正六边形 $ABCDEF$ 是入口．底是三个菱形$A'B'OF'$，$OB'C'D'$，$D'E'F'O$．这些菱形腊板同时是另一组六棱柱洞的底，三个菱形分属于三个相邻的六棱柱.

历史上不少学者注意到蜂房的奇妙结构．例如著名的天文学家刻卜勒（Johannes Kepler, 1571.12.27—1630.11.15）就说过这种充满空间的对称的蜂房的角应该和菱形十二面体（rhombic dodecahedron，各个面都是菱形的十二面体）的角一样．另一个法国的天文学家马拉尔第（Maraldi）经过详细的观测研究后指出：菱形的一个角（图58中的$\angle B'C'D'$）等于109°28′，而另一角（$\angle OB'C'$）是70°32′.[1]

法国自然哲学家列俄木（R. A. F. de Réaumur, 1683—1757）作出一个猜想，他认为用这样的角度来建造蜂房，在相同的容积下最节省材料．于是请教瑞士数学家可尼希（Samuel Koenig），他证实了列俄木的猜想.但计算的结果是109°26′和70°34′，和实际的数值有两分之差.

列俄木非常满意，1712年将这结果递交科学院．人们认为蜜蜂解决这样一个复杂的极值问题只有2′的误差，是完全可以允许的．可尼希甚至说蜜蜂解决了超出古典几何范围而属于牛顿、莱布尼兹微积分的问题.

可是事情还没有完结．1743年，马克劳林在爱丁堡重新研究蜂房的形状，得到更惊人的结果．他完全用初等数学方法，

---

〔1〕D'Arcy W. Thompson, Growth and Form (1942) pp. 525—544. 载有详细的历史和研究结果.

得到菱形的钝角是109°28′16″，锐角是70°31′44″，和实测的值一致。[1] 这 2′的差，不是蜜蜂不准，而是数学家可尼希算错了。他怎么会算错的呢？原来是所用的对数表印错了。[2]

可尼希的方法没有发表出来，后来有不少人给出各种的解法。较简单的就是普通微积分里求极值的方法。

设正六边形一边的长$BC=a$（实际 a 约为$3mm$），$DD'=b$，则不论$CC'(<b)$长短如何，巢的容积不变。设 $\theta=\frac{1}{2}\angle B'C'D'$，易知菱形$B'C'D'O$与两个梯形$B'BCC'$，$C'CDD'$面积的和是

$$S=\frac{3}{2}a^2\operatorname{ctg}\theta+2ab-\frac{a^2}{2}\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\theta-1}$$

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{3a^2}{2\sin^2\theta\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\theta}}\left(1-\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\theta}\right),$$

$\theta=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}$ 是所求的极小点。

菱形钝角$2\theta=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{2}=109°28'16''.39$时图58所示的图形表面积最小。

生物现象常常给我们很大的启发。马克思说得好："蜜蜂建筑蜂房的本领使人间的许多建筑师感到惭愧。但是，最蹩脚的建筑师从一开始就比最灵巧的蜜蜂高明的地方，是他在用蜂蜡建筑蜂房以前，已经在自己的头脑中把它建成了。"[3]

---

〔1〕他的文章 Colin Maclaurin, On the bases of the cells wherein the bees deposit their honey, Phil. Trans. XLII, pp. 561—571 (1743).

〔2〕《知识就是力量》（1956.7号）p.37，说对数表的错是后来偶然发现的，一只船遇难的时候，船长是用这张对数表来计算经度的。

〔3〕马克思《资本论》第一卷第五章。译本1976年版 p.202。

七、四百多年前的数学竞赛

学过初等代数的人都知道一元二次方程有求根公式，只要将系数往公式里一代，就可以算出方程的根来。三、四次方程也有类似的求根公式，不过比二次方程复杂得多罢了。它的发现，还有一段颇为有趣的历史。

15世纪的意大利，在代数方程论方面有很大的进展。但著名数学家巴巧利在他的书（1494）中却说："$x^3+mx=n$，$x^3+n=mx$之不可解，正象化圆为方问题一样。"[1]

不久，波伦那（Bologna，意大利北部）大学教授费罗（Scipione del Ferro，1465—1526）解出 $x^3+mx=n$ 的一种特殊情形。他在1510年左右把方法透露给学生菲俄（Antonio Maria Fior，也叫佛罗里达斯，Floridus）[2]和他的女婿及继承人那发（Annibale della Nave，1500?—1558）。[3]那时候有一种风气，对自己的发明严守秘密，以便在公开的竞赛中取得胜利。费罗的方法没有发表，也没有流传开来。

塔塔利亚（Nicolo Tartaglia，1499?—1557）原名丰坦那（Fontana）[4]，是自学成功的大数学家。幼年时，意、法发生战争，法军攻陷他的家乡布里西亚（Brescia，意大利北部），大肆杀戮。塔塔利亚的父亲带着他藏在寺院之中，仍然难免于

〔1〕小坂正行《世界数学史》（1955）p. 160. 本书第六章第二节. p. 148.
〔2〕D. E. Smith, History of Mathematics, vol. I(1923) p. 295.
〔3〕Marris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times(1972) p. 263.
〔4〕他的生年另外的说法是1500,1506.



塔塔利亚(Tartaglia)

祸。父亲被法军杀死，塔塔利亚头部和上下颚受重伤。后来他的母亲在尸骸堆中把他找到。那时正值兵荒马乱之际，一时无处就医。他母亲忽然想到狗在负伤时常用舌头舔愈伤口，于是便仿效这种最原始的办法。伤口居然好起来，但因受伤过重，愈后言语失灵，好象口吃一样，所以有塔塔利亚（口吃者）的绰号。

塔塔利亚父亲死后，家境非常贫困，甚至连纸笔都买不起，更不用说上学了。他母亲在父亲坟墓的石板上教他认字和算题。塔塔利亚有聪敏的天资和刚毅的意志，独自学会了拉丁文和希腊文，[1]特别对数学肯下苦功去钻研。经过长期的自学，终于作出了重大的贡献。他先后在布里西亚、威尼斯等地教学。

1530年，有一个布里西亚的数学教师科拉（Colla）向塔塔利亚提出两个挑战性的问题：

1. 一个数的立方加上它的平方的3倍等于5，求这个数。相当于解方程

---

〔1〕F.Cajori, A History of Elementary Mathematics (1916) p. 140.

$$x^3+3x^2=5. \qquad (1)$$

2．求三个数，第二个数比第一个数多2，第三个数又比第二个数多2，三数的乘积是1000．相当于解方程

$$x(x+2)(x+4)=1000$$

或

$$x^3+6x^2+8x=1000.\text{[1]} \qquad (2)$$

塔塔利亚求得方程（1）的根为

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})}-1$$

$$=1.10380340,$$

这是完全正确的．另有两虚根 $-2.05190170\pm0.56523585i$，当时未知．

又求得方程（2）的根

$$x=\sqrt[3]{500+\sqrt{250000-\frac{64}{27}}}+\sqrt[3]{500-\sqrt{250000-\frac{64}{27}}}-2$$

$$=8.1333255,$$

虚根 $-7.0666628\pm8.544777i$ 当时未知．

塔塔利亚公开宣称他已经知道解法，但绝对保守秘密．这引起菲俄不服，也宣称他会解三次方程．塔塔利亚认为他是吹牛．于是相约于1535年2月22日在米兰（Milan）大教堂进行公开竞赛．

等到塔塔利亚闻知菲俄得自费罗的秘传，而自己的方法又欠完善，深知要取得胜利，必须想出更好的办法来．于是他重新开始钻研，常常彻夜不眠，思考更完善的解法，然而竟一无所得．

---

〔1〕J.F.Scott, A History of Mathematics (1958) pp. 87—88.

比赛日期一天天接近，塔塔利亚终日惶惶不安。2月12日夜，又照例伏案工作直到黎明，他带着那混沌的头脑，步出户外，伸张两臂呼吸新鲜空气。刹那间豁然开朗，多日的思考，终于取得了成果。他掌握了较好的方法，焦虑与疲劳一扫而光。这时离比赛日期还有10天。

塔塔利亚设 $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$，则

$$x^3=-3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u}(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})+t-u.$$

和 $x^3=-mx+n=-m(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})+n$ 比较，有

$$m^3=27tu,\quad n=t-u.$$

由此知 $t=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}+\frac{n}{2}, u=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}-\frac{n}{2}$,

于是得 $x^3+mx=n$（m，n 是正数）的解。

用类似方法可解 $x^3=mx+n$。

2月22日，竞赛正式开始。两人各给对方出30个题目，谁解得最多最快，谁就得胜。塔塔利亚在两小时之内解完所有的题，而菲俄一个题也解不出来。塔塔利亚大获全胜而归。

他所解的题有

$$x^3+9x^2=100 \qquad (x=\sqrt{24}-2),$$

$$x^3+3x^2=2 \qquad (x=\sqrt{3}-1),$$

$$x^3+4=5x^2 \qquad (x=\sqrt{8}+2),$$

$$x^3+6=7x^2 \qquad (x=\sqrt{15}+3).$$

从此以后，塔塔利亚立志进一步探讨三次方程的一般解法，因为虽然比赛得胜，但解法仍然是不完整的。1541年，塔塔利亚才真正得到三次方程的一般解法。

人们请求他将方法公开出来，他都拒绝了。他准备译完欧几里得和阿基米德的著作后，自己写一本包含三次方程解法



卡当 (Cardano)

的代数著作，传于后世。想不到这种解法却被一个行为怪异的米兰学者卡当(Girolamo Cardano,[1] 1501—1576.9.21)骗了去。

卡当懂医学，好赌博，常给人占卜算命，曾因债务关系入狱，对数学也颇有研究。他再三乞求塔塔利亚将三次方程解法告诉他，并立下誓言，决不泄密。塔塔利亚受其“至诚”所感，授以方法。这是1539年的事。可是没有多久，卡当便背信弃义，写成《大术》(Ars Magna, 1545 在纽伦堡出版）一书，介绍了三次方程解法。后世把三次方程的求根公式叫做“卡当公式”，而塔塔利亚之名反而湮没无闻。

卡当在《大术》第11章中说：“大约三十年前，波伦那的费罗发现这一法则并传授给威尼斯的菲俄，他曾和塔塔利亚竞赛，后者也发现了这一方法。塔塔利亚在我的恳求下把方法告诉我，但没有给出证明。在此帮助下我找到了几种证法，它是非常困难的。”[2]

尽管说明了方法来自塔塔利亚，但失信的行为仍然激起塔塔利亚的愤怒。他向卡当宣战，要求作公开竞赛。双方各拟31题，限期15天交卷。这次卡当派他的学生斐拉里(Lodovico

---

〔1〕 也拼作Jerome Cardan, Hieronymus Cardanus.

〔2〕 D.E.Smith, A Source Book in Mathematics (1959) p. 204.

Ferrari, 1522—1565）去应战，自己不去参加．塔塔利亚以善解题著称，在七天之内，解出大部分题目．对方经过五个月才交出答案来，但除了一题之外，其余都是错的．剧烈的争辩随之而来，结果是不了了之．

塔塔利亚曾有不少关于军事科学、代数、筑城术、火药制法、商业算术等著作，但他一生的理想是要完成一部包含他的新算法的巨著．这场风波过去，心情平静下来之后，他又重整旗鼓，准备去完成那挂在心头已久的代数学．可是没有来得及实现他的愿望，便与世长辞了．

三次方程的不可约情形困惑着卡当，他实在不了解其真实意义．到邦别利（Rafael Bombelli, 1526.1—1572）才圆满地解决了这个问题，他指出不可约情形常有三个实根（发表于1572年）．这是虚数发展史上的里程碑．

三次方程解决之后，自然引起四次方程或更高次方程解法的探讨．这次仍然是科拉提出一个四次方程

$$x^4+6x^2+36=60x$$

来求解．原题是：三数成等比数列，前两数的积是6，三数的和是10．令此三数为 $\frac{6}{x}$，x，$\frac{x^3}{6}$，则

$$\frac{6}{x}+x+\frac{x^3}{6}=10,$$

导致上述的四次方程．

卡当对此没有办法．问题落到斐拉里手上，他出色地完成了这一任务，发现四次方程的一般解法，后来叫做“斐拉里解法”．斐拉里出身寒微，15岁时在米兰充当卡当的家仆，卡当渐渐认识他出众的才能，便聘任他做秘书，最后接受他为学生和朋友．斐拉里没有写过什么著作，只是卡当的《大术》记载了他的方法．

附录：数学家人名索引

外 文 索 引

外文姓名后的数字指生卒年月，如不标明是公元前，则指公元后。译名主要依据《英汉 数 学 词 汇》(1974)。译名后面括号内数字指人名所在的主要章节，章节后面的数字指所在页码，第1个页码是主要的。如(7.3)187，指人名所在的主要章节是第187页第七章第三节。(四·四)495，指第495页第四编第四段。

1

2

汉 文 索 引

按笔划多寡排列．同一笔划又按丶一丨丿的顺序排列．西方人的译名仅标出原文．

一 画

二 画

三 画

四画丶

四画一

四画丨丿

五画丶

五画一

五画丨

五画丿

六画丶

六画一丨

六画丿

七画丶

七画一

七画丨

七画丿

八画丶

八画一

八画丨

八画丿

九画丶

九画一

九画丨

九画丿

十画丶

十画一丨

十画丿

十一画丶

十一画一

十一画丨丿

十二画丶

十二画一

十二画丨

十二画丿

十三画

十四画

十五画

十六画

十七画

